

I megoldás. Legyen a keresett polinom

$$(1) \quad p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

ha $n > 0$, ennek deriváltja

$$(2) \quad p'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1},$$

ha pedig $n = 0$, akkor $p'(x)$ azonosan 0. Olyan $p(x)$ -et keresünk, amelyhez található olyan $q(x)$ polinom, hogy

$$(3) \quad p(x) = q(x) p'(x).$$

Ebből $n = 0$ mellett $p(x) = 0$ következik, ami azonban nem megoldás, mert 0-val nem lehet osztani. A továbbiakban feltesszük, hogy $n > 0$, ekkor azt is feltehetjük, hogy $a_n \neq 0$, vagyis p pontosan n -edfokú. Ekkor p' $(n-1)$ -edfokú, tehát (3) csak elsőfokú q -val teljesülhet:

$$(4) \quad q(x) = bx + c.$$

Ezt (3)-ba helyettesítve, és felhasználva, hogy két polinom azonossága a megfelelő fokú tagok együtthatóinak az egyenlőségével ekvivalens, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_0 &= nba_0 \\ a_1 &= (n-1)ba_1 + nca_0 \\ &\vdots \\ a_k &= (n-k)ba_k + (n-k+1)ca_{k-1} \\ &\vdots \\ a_n &= 0 + ca_{n-1} \end{aligned}$$

Ezekből egyrészt $nb = 1$, másrészt

$$a_k = \frac{n-k+1}{k} nca_{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

következik. Ez utóbbiból némi számolással kapjuk, hogy

$$a_k = \binom{n}{k} (nc)^k a_0,$$

vagyis

$$(6) \quad p(x) = a_0 (x+d)^n,$$

ahol $d = nc$. Emellett

$$p'(x) = na_0 (x+d)^{n-1},$$

ami valóban eleget tesz (3)-nak, ha q -nak a

$$q(x) = \frac{1}{n} (x-d)$$

polinomot választjuk. Tehát (6) a feladat összes megoldását megadja.

Strommer Pál (Budapest, Piarista Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldásban beláttuk, hogy

$$(7) \quad p(x) = \frac{1}{n} (x+d)p'(x)$$

vagyis p osztható $(x+d)$ -vel. Legyen k az $(x+d)$ legmagasabb fokú hatványa, amivel $p(x)$ osztható:

$$(8) \quad p(x) = (x+d)^k h(x)$$

ahol h már nem osztható $(x+d)$ -vel, azaz $h(-d) \neq 0$. Ekkor

$$p'(x) = k(x+d)^{k-1} h(x) + (x+d)^k h'(x),$$

amit (8)-cal együtt (7)-be helyettesítve, majd $(x+d)^k$ -nel osztva kapjuk, hogy

$$h(x) = \frac{k}{n} h(x) + (x+d)h'(x).$$

Ebbe az $x = (-d)$ számot helyettesítve $h(-d) \neq 0$ miatt kapjuk, hogy $k = n$, vagyis $h(x)$ konstans. Ezek mellett (8) ekvivalens (6)-tal, tehát (6) adja meg az összes megoldást.

III. megoldás. Ha (3)-ban q nem azonosan 0, (3) szerint $\frac{p'}{p} = \frac{1}{q}$. Mivel itt $\frac{p'}{p}$ a $\log p(x)$ függvény deriváltja, az $\frac{1}{q} = \frac{n}{x+d}$ függvény pedig a $\log(x+d)^n$ függvény deriváltja, ebből következik hogy a $\log(x+d)^n$ és $\log p(x)$ függvények különbsége állandó:

$$\log p(x) - \log(x+d)^n = A,$$

vagyis

$$p(x) = B(x+d)^n,$$

ahol $A = \log B$, ismét (6)-ot kapjuk.