



Az iskolai függvénytáblázat képlettárában megtalálható összefüggés szerint az $APQR$ tetraéder V térfogata

$$V = \frac{1}{6} \cdot AP \cdot AR \cdot AQ \cdot \sin(\angle APQ) \cdot \sin \delta,$$

ahol δ az APQ sík és az AR él hajlásszöge. Mivel $\angle APQ < \pi$ és δ adottak, V akkor és csak akkor minimális, ha $AP \cdot AR \cdot AQ$ minimális.

A Geometriai Feladatok Gyűjteménye I. kötetének 1991. feladatát esetünkre alkalmazva:

$$(1) \quad \frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} + \frac{AD}{AR} = 1.$$

A számtani és mértani közepek közti összefüggés alapján:

$$(2) \quad \frac{1}{3} = \frac{\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} + \frac{AD}{AR}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AP \cdot AQ \cdot AR}},$$

ahonnan

$$(3) \quad AP \cdot AQ \cdot AR \geq 27 AB \cdot AC \cdot AD.$$

(2) és (3) ekvivalensek, (3) jobb oldala állandó, ezért $AP \cdot AQ \cdot AR$, és így V is, akkor és csak akkor maximális, ha (2)-ben is egyenlőség van, azaz ha

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{AD}{AR} = \frac{1}{3},$$

hiszen összegük (1) szerint 1. Megjegyezzük, hogy (1) azt is biztosítja, hogy az $AP = 3AB$, $AQ = 3AC$, $AR = 3AD$ összefüggéseknek megfelelő P , Q , R pontok, valamint E egy síkban legyenek.

Gombos János (Miskolc, Földes F. Gimn.)