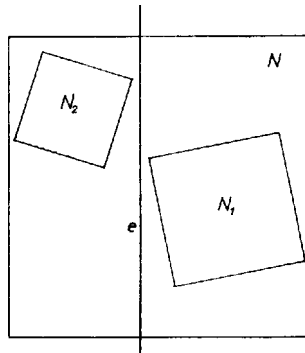


I. megoldás. Helyezkedjék el az 1 oldalú N_1 és az $1/2$ oldalú N_2 négyzet egy N négyzetben úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk. Ekkor van olyan e egyenes, amelynek N_1 és N_2 ellenkező oldalán fekszik. Ha e párhuzamos N valamelyik oldalával, akkor két téglalapra bontja azt, és mindegyiknek az e -re merőleges oldala legalább akkora, mint a sávban fekvő négyzet oldala. Ez esetben tehát N oldala legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalának összege.



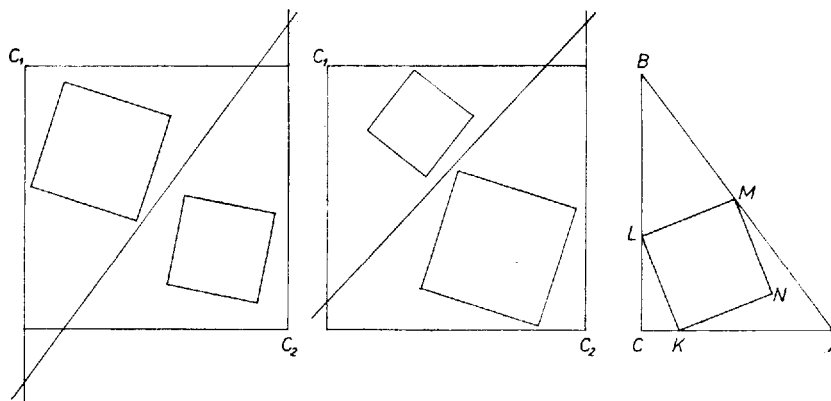
1. ábra

Ha e metszi N mindegyik oldalegyenesét, akkor vegyük mindkét oldalán N -nek a tőle legtávolabbi C_1 , ill. C_2 csúcsát. A C_1 -en, ill. C_2 -n átmenő oldalegyenesek e -vel egy H_1 , ill. H_2 derékszögű háromszöget alkotnak, amelyek N_1 -et, ill. N_2 -t tartalmazza. Állításunk bizonyítására elég azt megmutatni, hogy *egy derékszögű háromszög tartalmazza négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a háromszög befogóján nyugszik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*

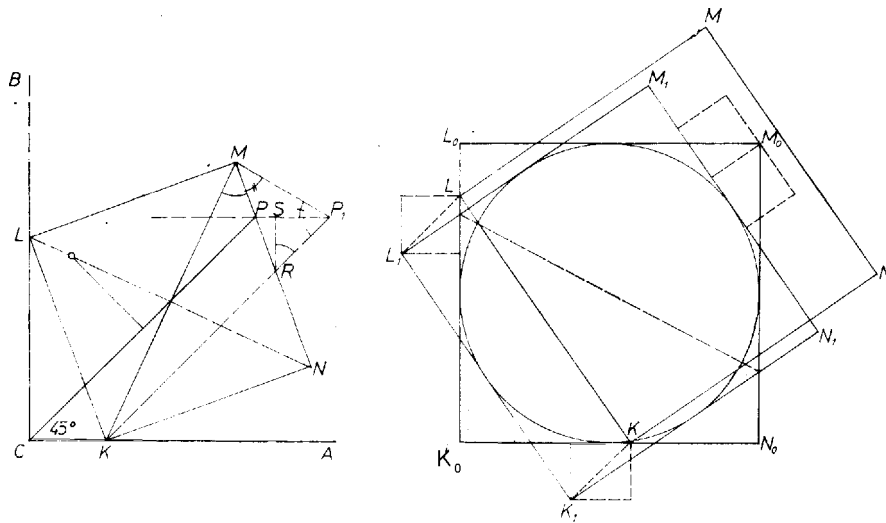
Valóban, ha ez igaz, akkor a H_1 -ben és H_2 -ben elhelyezhető legnagyobb négyzet átlója, N -nek a C_1C_2 átlójára esik, és mivel a négyzetek nem fedhetik át egymást, így átlóik összege N átlóját, oldalhosszaik összege tehát N oldalát adja, vagyis igaz a bizonyítandó állítás is.

A továbbiakban a fent megfogalmazott segédtevélt bizonyítjuk.

Az ABC derékszögű háromszögben levő tetszőleges szerinti $KLMN$ négyzetet elmozgathatjuk úgy, hogy két csúcsa, mondjuk K és L az AC , ill. BC befogón legyen – ha nem lett volna így eredetileg –, majd C -ből nagyítva, ha kell, elérhetjük, hogy egy csúcs az átfogóra kerüljön. Elég tehát az ilyen helyzetű négyzeteket vizsgálni. Ezek középpontja a háromszög derékszögének szögfelezőjén van. Forgassuk el ugyanis a négyzetet a középpontja körül derékszöggel úgy, hogy az AC -n levő csúcsa a BC -n levőbe menjen át. Ekkor az AC egyenes is átmegy BC -be, így a középpont e két egyenestől egyenlő távolságban van, tehát rajta van a köztük levő szög felezőjén.



2. ábra



3. ábra

Annak a négyzetnek, amelyiknek az egyik csúcsa C -be esik, az ezzel szemközti csúcsa nincs közelebb C -hez, mint a C -ből induló szögfelező MN -nel való P metszéspontja. Elég tehát megmutatnunk, hogy ha K és L különbözik C -től, akkor $CP > KM$.

Toljuk el CP -t párhuzamosan a KP_1 helyzetbe, ekkor a KP_1M háromszög két oldalát kell összehasonlítani. Ezt a velük szemben levő szögek közvetítésével fogjuk megtenni. A KM -mel, ill. KP_1 -gyel szemközti szög $PP_1M \angle$ -gel, ill. $PMP_1 \angle$ -gel nagyobb 45° -nál.

Jelöljük KP_1 és MN metszéspontját R -rel, R vetülete PP_1 -en legyen S . P_1RS háromszög derékszögű és egyenlő szárú, továbbá S a P és P_1 pont közt van, így

$$PRP_1 \angle > SRP_1 \angle = PP_1R \angle,$$

amiből következik, hogy

$$PP_1 > PR.$$

Azt is tudjuk, hogy CP felezi KM -et, így felezi MR -t is, mert KR és CP párhuzamos. Ezért

$$MP = PR < PP_1, \quad \text{tehát} \quad MP_1P \angle < PMP_1 \angle.$$

De ekkor egyszersmind

$$MP_1K \angle = MP_1P \angle + 45^\circ < PMP_1 \angle + 45^\circ = KMP_1 \angle,$$

amiből viszont

$$KM < KP_1 = CP$$

következik, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Gyorsabban befejezhetjük a bizonyítást a kerületi szögek tételének felhasználásával: C , K , P és M egy körön van, mert KP 45° -os szögben látszik C -ből is, M -ből is. A kör középpontja a CP és KM húr felező merőlegesének metszéspontja. Mivel az előbbi húr átmegy az utóbbi felezőpontján, a húrok középponttól mért távolságai egy derékszögű háromszög befogója és átfogója. A KM húrtól mért távolság az átfogó, tehát a nagyobbik, így a KM húr a kisebb.

II. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy ha egy $K_0L_0M_0N_0 = \mathbf{N}_0$ négyzetet egy olyan $KLMN = \mathbf{N}$ helyzetbe mozdítunk el a síkban, hogy K és L csúcsa a K_0N_0 , ill. K_0L_0 félegyenesen maradjon, akkor $\mathbf{N}$ tartalmazni fogja az M_0 csúcsot. Ez valóban azt jelenti, hogy ha $\mathbf{N}$ benne van egy derékszögű háromszögben, amelyiknek derékszöge az $L_0K_0N_0 \angle$, akkor írható a háromszögbe $\mathbf{N}$ -nél nagyobb négyzet, amelyiknek két oldala a befogókon nyugszik.

Forgassuk először el a négyzetet a középpontja körül $\mathbf{N}_0$ körüljárásával ellentétes irányba hegyes szöggel, a $K_1L_1M_1N_1 = \mathbf{N}_1$ helyzetbe, majd toljuk el a végleges helyére. K_1 és L_1 egyenlő távol van $\mathbf{N}_0$ megfelelő oldalától a forgatás következtében. Rajzoljunk olyan négyzeteket, amelyeknek egyik csúcsa K_1 , ill. L_1 , másik két csúcsa $\mathbf{N}_0$ legközelebbi oldalán van és K_1 -ből, ill. L_1 -ből induló átlója K_0M_0 -lal párhuzamos. Ekkor a kérdéses átlók egyenlők lesznek, így megadják a kívánt eltolás vektorát.

Azt kell még belátnunk, hogy az eltolás hossza nagyobb, mint a K_0M_0 szakasz $\mathbf{N}_1$ -en túlnyúló darabja. Azonban M_0 távolsága L_1N_1 -től ugyanakkora, mint K_1 -é K_0N_0 -tól, mert K_1N_1 és M_0N_0 , továbbá L_1N_1 és K_0L_0 a két négyzet közös beírt körének egymással átellenes érintőpárjai, így metszéspontjaik összekötő egyenesére tükrözve a két négyzetet egymásba mennek át. Rajzoljuk meg azokat a négyzeteket, amelyeknek egyik csúcsa M_0 és két-két csúcsuk M_1N_1 -en van, ezek egyike tartalmazza a kérdéses szakaszt, az tehát nem nagyobb, mint a négyzet átlója, aminek hossza viszont éppen az eltolás hossza. Ezzel ismét igazoltuk a segéd-tétel állítását.

Megjegyzés. A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a nagy négyzetben tartalmazott két négyzet oldalának hossza 1 és $1/2$ egység, így a b) részben azt bizonyítottuk be, hogy *ha egy N négyzetben elhelyezhető egy N_1 és N_2 négyzet úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk, akkor N oldalának hossza legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalhosszának az összege.* Ez lényegében megegyezik a P. 208. pontversenyen kívüli problémával¹, így a fentiekben annak is megoldását adtuk.

¹Lásd KÖMAL 48. kötet 3. szám 126. oldal.