

I. Megoldás. Először belátjuk, hogy az A pont hozzátartozik a mértani helyhez, vagyis hogy

$$AB^2 \cdot \sin 2\beta + AC^2 \cdot \sin 2\gamma = 4t.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$AB^2 \cdot 2 \sin \beta \cdot \cos \beta + AC^2 \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma = 4 \cdot \frac{AB \cdot AC \sin \alpha}{2},$$

$$\frac{AB}{AC} \cdot \sin \beta \cos \beta + \frac{AC}{AB} \sin \gamma \cos \gamma = \sin \alpha,$$

$$\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta = \sin \alpha,$$

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha,$$

amiről viszont tudjuk, hogy érvényes, hiszen $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

Hasonlóan kaphatjuk, hogy B és C pont szintén hozzátartozik a mértani helyhez.

A feladat további részét koordináta geometriai úton oldjuk meg.

Legyenek a háromszög csúcsai $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ a P pont koordinátái pedig x és y . A feltétel szerint tehát:

$$(1) \quad \sin 2\alpha [(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2] + \sin 2\beta [(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2] + \sin 2\gamma [(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2] = 4t.$$

Mivel α , β , γ és t állandók, ez az egyenlet ilyen alakra hozható (ekvivalens átalakítások után):

$$(2) \quad Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

Tudjuk, hogy a (2) egyenletet vagy csak egy pont elégíti ki, vagy egy kör pontjai elégítik ki, vagy pedig semmilyen pont nem elégíti ki.

Mivel azonban A , B és C pontok kielégítik (2)-t, ezért (2) egy kör egyenlete.

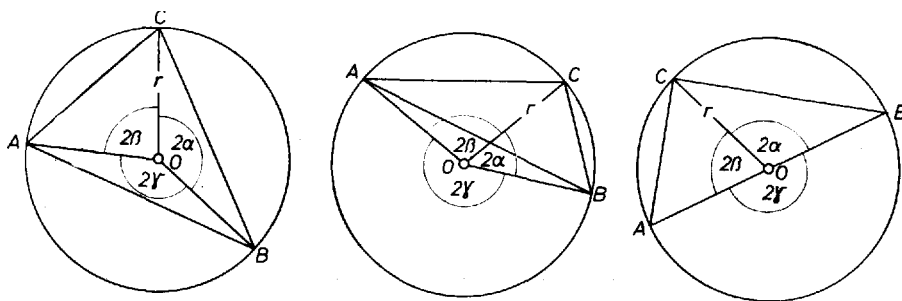
(1) és (2) ekvivalenciája miatt tehát a keresett P pontok mértani helye a háromszög köré írt kör.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn.)

II. Megoldás. Bármilyen ABC háromszögre érvényes a

$$(3) \quad 4T = 2r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

összefüggés.



Ugyanis – rendre a hegyes, tompa és derékszögű háromszögre –

$$T = T(AOB) + T(BOC) + T(COA) = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha,$$

$$T = T(AOC) + T(COB) - T(AOB) = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha - \frac{1}{2}r^2 \sin(360^\circ - 2\gamma),$$

$$T = T(AOC) + T(BOC) = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta.$$

Ezek mindegyike viszont egyenlő az elsővel, hiszen $\sin(360^\circ - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$ és $\sin 2 \cdot 90^\circ = 0$. Az első összefüggésből (3) nyilvánvaló.

Legyen $PO = d$, $\angle AOP = \varepsilon$, $\angle AOB = 2\gamma$, $\angle BOC = 2\alpha$ és $\angle COA = 2\beta$ a szögek mindegyike irányított.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak Gimn.)