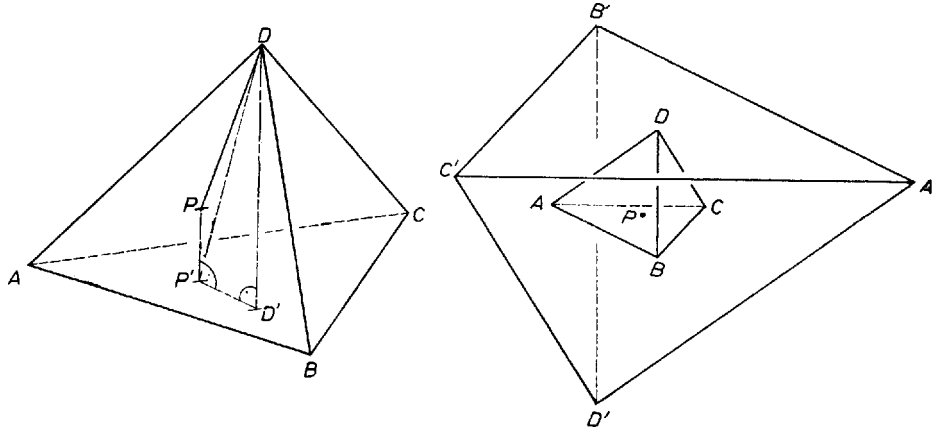


I. megoldás. Az $ABCD$ tetraéder térfogatát V_{ABCD} -vel jelöljük. Analóg jelölésmódot vezetünk be más tetraéderek térfogatára is.

Vetítsük D -t, ill. P -t az ABC háromszög síkjára, a vetületek legyenek P' , ill. D' .



A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$DP' \leq DP + PP',$$

továbbá, mivel DD' merőleges az ABC háromszög síkjára: $DP' \geq DD'$. A fentiek miatt

$$DD' \leq DP + PP'.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $T_{ABC}/3$ -mal megszorozva, figyelembe véve a térfogatképletet, a

$$V_{ABCD} \leq V_{ABCP} + \frac{1}{3}T_{ABC} \cdot PD$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Hasonló módszerrel kaphatjuk meg a

$$V_{ABCD} \leq V_{ABDP} + \frac{1}{3}T_{ABD} \cdot PC,$$

$$V_{ABCD} \leq V_{ACDP} + \frac{1}{3}T_{ACD} \cdot PB,$$

$$V_{ABCD} \leq V_{BCDP} + \frac{1}{3}T_{BCD} \cdot PA$$

egyenlőtlenségeket. Mivel P a tetraéder belsejében van: $V_{ABCD} = V_{ABCP} + V_{ABDP} + V_{ACDP} + V_{BCDP}$. Ezt figyelembe véve a négy egyenlőtlenség összeadásával a

$$4V_{ABCD} \leq V_{ABCD} + \frac{1}{3}(T_{ABC} \cdot PD + T_{ABD} \cdot PC + T_{ACD} \cdot PB + T_{BCD} \cdot PA)$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Ebből átrendezéssel adódik az állítás.

Belátható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha a tetraédernek van magasságpontja és az P -vel egybeesik.

Czompó József (Győr, Révai M. Gimn.)

II. megoldás. Tekintsük azt a tetraédert, amelynek lapjai párhuzamosak az eredeti $ABCD$ tetraéder lapjaival és átmennek a szemben levő csúcson. Ez a tetraéder hasonló az eredetihez, és a hasonlóság aránya 1:3. Ezért

$$(1) \quad \begin{aligned} V' &= 27V; & T_{B'C'D'} &= 9T_{BCD}; & T_{A'B'C'} &= 9T_{ABC}; \\ & & T_{A'B'D'} &= 9T_{ABD}; & T_{A'C'D'} &= 9T_{ACD}. \end{aligned}$$

P -nek az $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$, $B'C'D'$ lapoktól mért távolságát jelölje m_D , m_B , m_C , ill. m_A . Nyilván

$$(2) \quad PA \geq m_A, PB \geq m_B, PC \geq m_C, PD \geq m_D,$$

emiatt

$$V' \leq \frac{1}{3}T_{A'B'C'} \cdot PD + T_{A'B'D'} \cdot PC + T_{A'C'D'} \cdot PB + T_{B'C'D'} \cdot PA.$$

(1)-et behelyettesítve

$$27V \leq \frac{1}{3}(9T_{ABC} \cdot PD + 9T_{ABD} \cdot PC + 9T_{ACD} \cdot PB + 9T_{BCD} \cdot PA).$$

Ennek átrendezése után bizonyítandó állításunkat kapjuk.

(2)-ből az is kiderül, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a tetraédernek van magasságpontja és éppen P az.