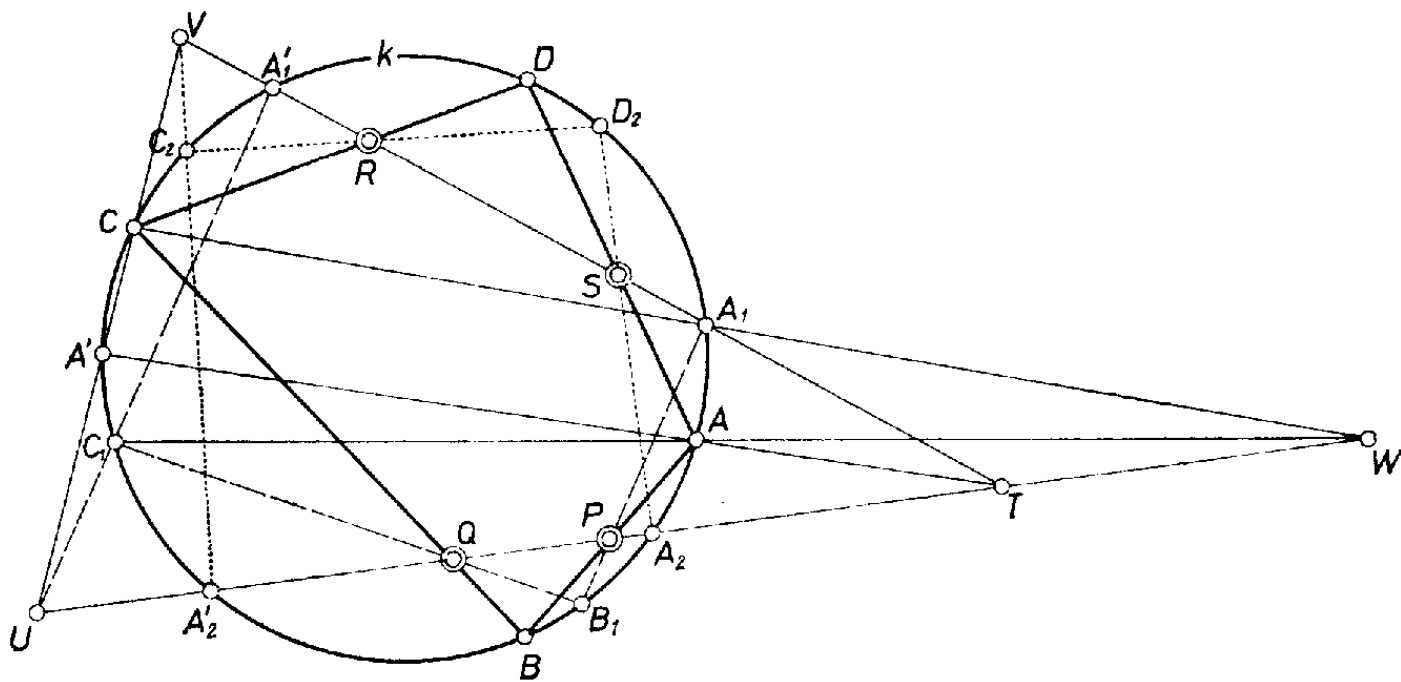


Kössük össze A -t a PQ , RS egyenesek T metszéspontjával, és messe ez az egyenes az adott k kört A' -ben. (Ha $PQ \parallel RS$, az AT egyenes legyen az A -n át velük párhuzamosan húzott egyenes, ha pedig AT érinti k -t, A' legyen A -val azonos. Ehhez hasonló kiterjesztés mellett érvényesek a megoldás további lépései is, ezt azonban nem fogjuk minden esetben megismételni.) Messe az $A'C$ egyenes PQ -t U -ban, RS -t V -ben. Ezeket a pontokat fogjuk megszerkeszteni, belőlük C mint az UV egyenes és k egyik metszéspontja adódik, a keresett négyszög többi csúcsa pedig C -ből kapható meg. Emiatt a megoldások száma 2, 1 vagy 0 az UV egyenes és k kölcsönös helyzete szerint. Az alábbiakból már könnyen kiolvasható a javasolt szerkesztés helyessége is, ennek végiggondolását az olvasóra hagyjuk.



A keresett U pont megszerkesztése a következő észrevételen alapszik. Az $ABCA'$ húrnégyszög oldalegyenesei a PQ egyenest rendre a P , Q , U , T pontokban metszik. Megmutatjuk, hogy ha ugyanezt az egyenest ugyancsak k -ba írt $A_1B_1C_1A'_1$ húrnégyszög A_1B_1 , B_1C_1 , A'_1A_1 oldalegyenesei rendre a P , Q , T pontokban metszik akkor $C_1A'_1$ U -ban metszi az egyenest. Választhatjuk például A_1 , A'_1 -nek RS és k metszéspontjait, ezek B_1 , C_1 helyzetét már meghatározzák. V megszerkesztése hasonlóan történhet az $AA'CD$ húrnégyszög alapján, például a PQ egyenes k -n levő A_2 , A'_2 pontjaiból kiindulva.

Észrevételünk bizonyításához felhasználjuk a következő, Pascaltól származó tételt. Ha 1, 2, 3, 4, 5, 6 egy kör tetszőleges pontjai, és a 12, 45 egyenesek metszéspontja I, a 23, 56 egyeneseké II, a 34, 61 egyeneseké pedig III, akkor az I, II, III pontok egy egyenesen vannak. (A tétel kör helyett tetszőleges kúpszeletre is érvényes.) Ha pontok helyett érintőket, a pontokat összekötő egyenesek helyett az érintők metszéspontját, az egyenes metszéspontja helyett pedig a metszéspontokat összekötő egyeneseket mondunk, Brianchon tételét kapjuk.

Alkalmazzuk először Pascal tételét az A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 pontokra, kapjuk, hogy az AC_1 , A_1C egyenesek W metszéspontja is a PQ egyenesen van. Emiatt, ha most az A , A' , C , A_1 , A'_1 , C_1 pontokra alkalmazzuk Pascal tételét, kapjuk, hogy A'_1C_1 és $A'C$ metszéspontja a TW egyenesen van, vagyis A'_1C_1 ugyanott metszi PQ -t, mint $A'C$, és ez az, amit bizonyítani akartunk.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)