

Jelöljük a piros színű országok számát n -nel, és csúcsaik számát valamilyen sorrendben p_1 -gyel, p_2 -vel, $\dots$, p_n -nel. A megfelelő számokat a kék színű országokra jelölje m és $k_1, k_2, \dots, k_m$. A $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ összeg aszerint páros vagy páratlan, hogy a páratlan csúcsú, piros színű országok száma páros-e, vagy sem. Ugyanígy $K = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ paritása megegyezik a páratlan csúcsú, kék színű országok számának a paritásával, állításunk tehát azt jelenti, hogy $P + K$ páros.

Tegyük fel, hogy a piros és kék országok kiküldenek a hozzájuk tartozó csúcsokhoz egy-egy katonát. Összesen $P + K$ katonát küldenek ki, állításunkat tehát belátjuk, ha sikerül ezeket a katonákat párba állítani. Egy-egy csúcshoz legfeljebb két katona érkezik, hiszen a csúccsal szomszédos országok között legalább az egyik a sárga és a zöld országok közül való. Ha egy csúcsban két katona őrködik, akkor azok alkossanak egy párt. Az olyan csúcsokban, amelyekben csak egy katona van, a katona országán kívül még van egy sárga és egy zöld ország. Menjünk el ezek közös határvonalán a szomszédos csúcsig: itt is egy magányos katona áll, legyen ez az előbbi párja. Ez a párosítás nyilván kölcsönös, hiszen az utóbb talált katonától épp az előbbihez ment a zöld és sárga országok közt futó határvonal, állításunkat ezzel beláttuk.

Kiss Emil (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Megoldásunkban az első esetben a párba állított két katona közül az egyik piros, a másik kék. A második esetben azonban a két katona egyforma színű is lehet, tévedés volna tehát azt hinni, hogy a fenti megfontolásból az is kijön, hogy $P = K$.

2. Legyen S és Z a sárga és zöld országok csúcsszám-összege. Mivel a feladat állítása bármely két színre kimondható, a P , K , S , Z számok vagy mind párosak, vagy mind páratlanok.

3. Híres megoldatlan probléma, hogy kiszínezhető-e a földgömbön tetszőleges térkép négy színnel. Feladatunk ezzel kapcsolatban csak annyit mond, hogyha kiszínezhető, akkor a színezésnek megvan a fentiekben bizonyított tulajdonsága.