

Ismeretes, hogy a szabályos, egységnyi oldalú sokszög t területe: $t = \frac{n\varrho}{2}$, ahol ϱ a sokszög beírt körének sugarát jelöli.

Kössük össze a P pontot a sokszög csúcsaival. Mivel a sokszög konvex, ezért n db olyan háromszögre bomlik, amelyeknek egy-egy oldala egységnyi hosszúságú, s a hozzá tartozó magasságok rendre $d_1, d_2, \dots, d_n$. Ezért $t = (d_1 + d_2 + \dots + d_n)/2$. A fentiek miatt tehát

$$\frac{n\varrho}{2} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{2}, \quad \text{azaz} \quad \varrho = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}.$$

A számtani és harmonikus közép közötti összefüggést alkalmazva:

$$\varrho = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n}}.$$

Ezt átrendezve az

$$(1) \quad \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} \geq \frac{n}{\varrho}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Mivel azonban a sokszög területe nagyobb, mint beírt körének területe, ezért

$$\frac{n\varrho}{2} > \varrho^2\pi, \quad \text{azaz} \quad \frac{n}{\varrho} > 2\pi.$$

Ezt (1)-gyel összevetve, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Kecskés Csaba (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)