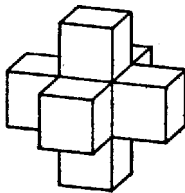


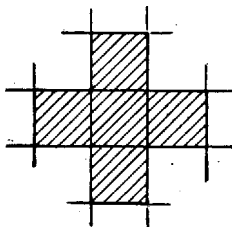
Az 1. ábrán látható lest 7 egybevágó kockából áll: egy központi kockából és a hozzá a lapjain keresztül csatlakozó másik hat kockából.



1. ábra

A tér kívánt kitöltését úgy készítjük el, hogy először egybevágó kockákkal töltjük ki a teret, majd ezeket hetes csoportokba szervezzük, a részeket mintegy utólag ragasztjuk össze, hogy a kívánt alakzatokat megkapjuk. Ennek érdekében természetesen olyan csoportokat alkothatunk, amelyekből az 1. ábra alakzata kialakul.

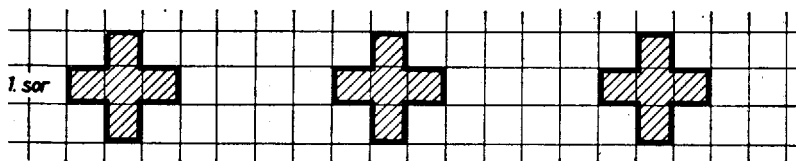
Töltsük ki tehát a teret az 1. ábrán látható testet alkotó kockákkal egybevágó kockákkal. Vegyünk e kockákból egy „vízszintes” réteget, azaz vegyük ki közülük azokat, amelyek középpontjai az egyik olyan síkban vannak, amelyek párhuzamos a kockák valamelyik lapjával. Ebben az S síkban a kockák metszetei négyzetrácsot alkotnak. Az olyan csoportnak, amelynek a központi kockáját metszi az S sík, öt eleme van az S síkban, ezek metszete a 2. ábra alakzata.



2. ábra

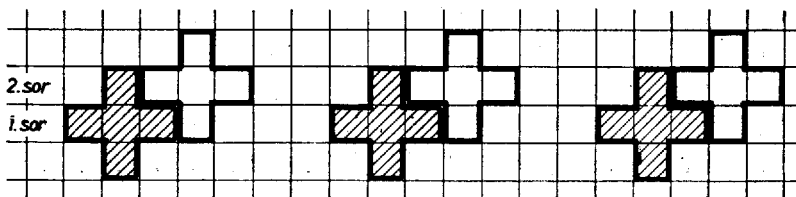
Ezekon kívül még azoknak a csoportoknak metszi valamelyik elemét S , amelyek központi eleme az S fölötti vagy az S alatti, a választott réteggel közvetlenül szomszédos rétegben vannak. Egy ilyen csoportnak egyetlen elemét metszi S , ezeket a metszeteket F -fel vagy A -val jelöljük aszerint, hogy a centrumuk S felett vagy alatt helyezkedik-e el. Az S -en levő négyzetrácsot tehát a 2. ábrán látható kereszt alakú K alakzatokkal, és F -fel és A -val jelölt négyzetekkel kell kitöltetnünk.

Várhatóan minden rétegben ugyanolyan sűrűn helyezkednek el a csoportcentrumok, emiatt e három alakzatot ugyanolyan sűrűn kell elhelyeznünk, ami most azt jelenti, hogy a sík elég nagy részeiben körülbelül ugyanannyi K -nak, A -nak és F -nek kell lennie. Azt is mondhatjuk, hogy mivel az 1. ábrán látott testtel egybevágó alakzatokban minden centrumot hat másik kocka övez, centrumul csak minden hetedik kockát célszerű választani. Legegyszerűbben úgy tehetünk ennek eleget, ha ez minden sorban teljesül. Vizsgáljuk meg tehát, hogy a 3. ábrán megkezdett rendszer folytatható-e először az S sík, majd az egész tér kívánt felbontásáig.



3. ábra

Nevezzük a most elhelyezett centrumok sorát elsőnek, és a felette levőt másodiknak. Ebben a másodikban is lesznek centrumok, mégpedig minden hatos közben (hat szomszédos üres, négyzetben) egy-egy centrum. Nem lehet centrum a hatos közök szélső eleme, mert ekkor a rá épülő K alakzat beleütközne a már elhelyezett K -ba, így csak a hatos közök szélétől számított második vagy harmadik négyzet lehet centrum. Legyen mondjuk a második négyzet a centrum (4. ábra).



4. ábra

	F	A		C		F	A		C		F	A	
A		C		F	A		C		F	A		C	
	C		F	A		C		F	A		C		F
	F	A		C		F	A		C		F	A	
F	A		C		F	A		C		F	A		C
	C		F	A		C		F	A		C		F
C		F	A		C		F	A		C		F	A
	F	A		C		F	A		C		F	A	
A		C		F	A		C		F	A		C	
	C		F	A		C		F	A		C		F
	F	A		C		F	A		C		F	A	

Áttekinthetőség kedvéért csak a C centrumokat jelöltük, a csatlakozó négyzeteket pálcikák jelzik. Minden hatos blokkban két szabad hely van még, ezek lesznek felváltva az alulról, illetve felülről benyúló A , illetve F elemek. (Megfigyelhetjük, hogy az 5. ábrán függőlegesen elhelyezkedő hatos blokkokban a szélüktől számított 3. négyzet a centrum, ha tehát indításkor a 3. négyzetet választjuk centrumnak a 4. ábrán, akkor is lényegében erre a rendszerre jutunk.)

$$\mathbf{r} = k\mathbf{e} + m\mathbf{f} + n\mathbf{g}$$
$$x = 7k + 2m + 3n$$

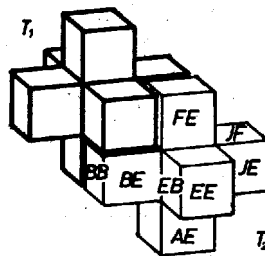
$$y = m$$

$$z = n$$

Válasszuk tehát centrumoknak azokat a kockákat a térben, amelyek középpontjainak x , y , z koordinátáira az $(x - 2y - 3z)$ kifejezés osztható 7-tel. Megmutatjuk, hogy a térben minden kocka vagy centrum, vagy egy – és csakis egy centrummal szomszédos, azaz egy és csakis egy centrumnak választott kockával van közös oldallapja. Legyenek egy tetszőleges K_0 kocka középpontjának a koordinátái (x, y, z) , és tekintsük az $N = x - 2y - 3z$ számot. Ha N osztható 7-tel, a K_0 kocka centrum. Ha ez 7-tel osztva 1-et vagy 6-ot ad, marhádékul, akkor az $(x - 1, y, z)$, ill. az $(x + 1, y, z)$ pontot tartalmazó kocka centrum. Ha az $N : 7$ osztás maradéka 2 vagy 5, akkor az $(x, y + 1, z)$, $(x, y - 1, z)$ pontok adják a K -lal szomszédos centrum középpontját. Ha pedig a maradék 3 vagy 4, akkor $(x, y, z + 1)$, illetve $(x, y, z - 1)$ a kívánt centrum. A választott csoportosítás helyességét ezzel bebizonyítottuk, a megoldást befejeztük.

A T_1 építőtest EJ lapjához a T_2 testből illeszkedő kocka nyilvánvalóan a JE laphoz is illeszkedik. Pontosabban: az EJ -hez illeszkedő lap T_2 -nek valamilyen XB lapja lesz, ahol X az F , A , B és H kockák valamelyike. A fenti

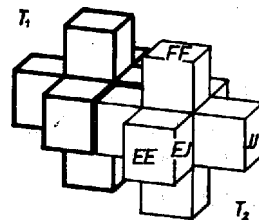
megoldásban az FB lap ez, és ekkor T_2 -ből FH illeszkedik T_1 -nek JE lapjához. Továbbá T_2 -nek B és H kockája is 2–2 lapjával illeszkedik T_1 -hez: a BF , BH , HF , HB lap rendre T_1 -nek EA , AE , JA , AJ . lapjához, vagyis a két építőtest 6–6 lapjával illeszkedik egymáshoz (6. ábra).



6. ábra

X helyére A -t vége ennek az illeszkedésnek egy vízszintes síkon való tükörképét kapnánk.

XB -ként T_2 -nek BB lapját választva még a BH és a HB lap illeszkedik T_1 -nek JE , JJ lapjához, más illeszkedés ekkor nincs köztük (7. ábra).



7. ábra

A 4. ábra szerinti csatlakozás ennek tükörképe egy az E lapokkal párhuzamos síkra. ($X = H$ esetén, hasonlóan a 7. ábrabeli helyzetnek egy tükörképét kapnánk, ti. amikor T_1 magjának azon az átlós síkján tükrözzünk, amely átmegy az E és J kockák közös élén. Ezzel áttekintettük a T_1 test EJ lapjának minden illeszkedési lehetőségét.

Vegyük észre, hogy itt T_1 -nek is, T_2 -nek is 1–1 külső, a konvex burkába tartozó – mondjuk így: véglapja szerepel az illeszkedésben: JJ , illetve BB ; a további 2–2 illeszkedés lapjait pedig kézenfekvő *beugró lapoknak* nevezni. A 6. ábra, szerinti – szoros; 6–6 lap menti – illeszkedésben viszont mind a 6 illeszkedő lap beugró (két különböző nagybetűvel megjelölt) lap.

Mivel egy építőtestnek 6 véglapja van, kézenfekvő ebből az a sejtés, hogy a térkitöltésben – ha ez lehetséges – T_1 -hez 6 másik test illeszkedik a 7. ábra szerint, lazábban, 3–3 lap mentén (természetesen alkalmas elfordításokkal értve az ábrát), ezzel T_1 -nek 6 · 3 lapjának illeszkedése intéződik el; a hátralevő $6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 = 6 \cdot 2$ lap már mind beugró lap, ezekhez pedig 2 másik építőtest „szorosan” illeszkedik, tehát T_1 -hez együttevén 8 másik test illeszkedik.

Arról már könnyű meggyőződni, modellekkel (elég hozzá 3 példány), hogy T_1 -nek ez a körülépítése valóban lehetséges, és ebből adódik az az újabb sejtés, hogy ezzel a tér kitöltési módja is egyértelműen meg van határozva. Ezt azonban természetesen még bizonyítani kell. Szoros illeszkedésben $\sqrt{3}$ egység, a laza esetben pedig $\sqrt{5}$ egység a két test centrumának távolsága.

2. Fjodorov (1880-ban) és H. Minkowski (1897-ben) orosz matematikusok megadták az összes – lényegében különböző – olyan konvex testet (poliédert), melyekkel a teret ki lehet tölteni.