

I. megoldás. Ha f minden gyöke valós, akkor előállítható gyöktényezőinek a szorzataként:

$$(1) \quad f(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

ahol A az f legmagasabb fokú tagjának az együtthatója ($A \neq 0$), n az f fokszáma és $x_1, x_2, \dots, x_n$ az f – nem feltétlenül különböző – gyökei. Azt mondjuk, hogy valamely x_0 szám az f -nek k -szoros gyöke, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok között pontosan k egyenlő x_0 -al, azaz ha

$$(2) \quad f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x), \quad \text{ahol} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Megmutatjuk, hogy ha x_0 az f -nek k -szoros gyöke, akkor az

$$F(x) = f(x) + \lambda f'(x)$$

polinomnak $x_0(k-1)$ -szeres gyöke. Valóban, ha f (2) alakú, akkor

$$F(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x) + \lambda k(x - x_0)^{k-1} \cdot g(x) + \lambda(x - x_0)^k \cdot g'(x) = (x - x_0)^{k-1} G(x),$$

ahol

$$G(x) = (x - x_0) \cdot g(x) + \lambda k \cdot g(x) + \lambda(x - x_0) \cdot g'(x),$$

tehát

$$G(x_0) = \lambda k \cdot g(x_0) \neq 0.$$

Jelöljük f különböző gyökeinek a számát m -mel, és tegyük fel, hogy ezek rendre α_1 -szeres, α_2 -szeres, $\dots$, α_m -szeres gyökei f -nek. Akkor ezek rendre $(\alpha_1 - 1)$ -szeres, $(\alpha_2 - 1)$ -szeres, $\dots$, $(\alpha_m - 1)$ -szeres gyökei F -nek, és mivel $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$, így már $(n - m)$ gyökét ismerjük F -nek. Megmutatjuk, hogy ha $\lambda \neq 0$, amint azt nyilván feltehetjük, akkor f bármely két szomszédos gyöke között van F -nek valós gyöke. Ezzel újabb $(m - 1)$ valós gyök létezését bizonyítjuk, és ez elég is, hiszen ha F -nek $(n - 1)$ gyöke valós, akkor

$$F(x) = A(x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_{n-1}) \cdot F_1(x),$$

ahol $F_1(x)$ elsőfokú polinom, tehát F_1 -nek van még egy valós gyöke.

Legyen tehát a és b az f két szomszédos gyöke:

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \cdot h(x),$$

ahol a h polinomnak nincs az $a \leq x \leq b$ szakaszon gyöke.

$$F(x) = (x - a)^{\alpha-1} (x - b)^{\beta-1} \cdot \left\{ (x - a)(x - b)[h(x) + \lambda h'(x)] + [\alpha(x - b) + \beta(x - a)] \right\}.$$

Itt a kapcsos zárójelben álló kifejezés értéke $x = a$ mellett $\alpha(a - b)$, ami negatív, $x = b$ mellett $\beta(b - a)$, ami pozitív, ha pedig egy polinom (vagy általában egy folytonos függvény) egy szakasz két végpontjában különböző előjelű, akkor a polinomnak van ezen a szakaszon gyöke. A bizonyítást ezzel befejeztük.

II. megoldás. Legyen $z = a + bi$ az $F(z)$ polinomnak tetszőleges gyöke. Megmutatjuk, hogy $b = 0$, azaz z valós. Nyilván feltehetjük, hogy $\lambda \neq 0$. Mivel $F(z) = f(z) + \lambda f'(z) = 0$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{\lambda},$$

tehát $f'(z)/f(z)$ valós. Tekintsük f -nek az (1) alakját, akkor

$$f'(z) = A \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (z - x_j) = \sum_{k=1}^n \frac{f(z)}{z - x_k},$$

tehát

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(a - x_k) + bi} = \sum_{k=1}^n \frac{a - x_k}{(a - x_k)^2 + b^2} - bi \sum_{k=1}^n \frac{1}{(a - x_k)^2 + b^2},$$

ami csak úgy lehet valós, ha $b = 0$. Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.