

I. megoldás. Felhasználva az ismert

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \text{és} \quad \cos(x+y) = 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1$$

azonosságokat, egyenletünk – egyszerű átalakítás után – a következő alakban írható:

$$\left(2 \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} = 0,$$

ami ekvivalens az alábbi egyenletrendszerrel:

$$(1) \quad 2 \cos \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x-y}{2},$$

$$(2) \quad \sin \frac{x-y}{2} = 0.$$

(2)-ből $x - y = 2k\pi$ (ahol k egész), azaz $y = x - 2k\pi$. Ezt (1)-be helyettesítve

$$2 \cos(x - k\pi) = \cos k\pi,$$

vagyis

$$2(-1)^k \cos x = (-1)^k,$$

tehát

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

s így egyenletünk megoldásai:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2(m-k)\pi \quad (k, m \text{ egész}),$$

ahol vagy mindkét helyen a plusz, vagy mindkét helyen a mínusz előjel veendő figyelembe.

II. megoldás. Legyenek **a**, **b** és **c** olyan egy közös pontból kiinduló egységvektorok, hogy ugyanazon forgási irány szerint az **a**, **b** és **b**, **c** vektorok által közrezárt szög rendre $x + y$, $\pi - x$ legyen, ekkor a **c**, **a** közti szög $\pi - y$. Így a skaláris szorzat ismert tulajdonságai alapján az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{v}$ vektorra

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}) = \\ &= 3 + 2(\cos(x+y) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi - y)) = \\ &= 3 - 2(\cos x + \cos y - \cos(x+y)), \end{aligned}$$

tehát

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3 - \mathbf{v}^2}{2} \leq \frac{3}{2},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, vagyis e három egységvektor egymásba fűzése egy szabályos háromszöget ad, tehát páronként bezárt irányszögük abszolút értéke $\frac{2\pi}{3}$. Így

$$\pi - x = \pm 2\pi/3 + 2n\pi, \quad \pi - y = \pm 2\pi/3 + 2m\pi$$

(n, m egészek), amiből egyszerű átalakítások után látható, hogy a megoldás

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi \quad (k, m \text{ egész})$$

alakban írható.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn.)