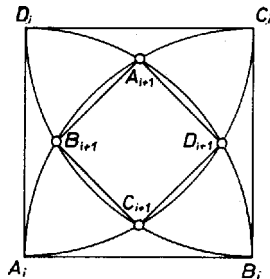


I. megoldás. Ismeretes – ez könnyen be is látható – a szabályos háromszög rács következő tulajdonsága: ha A és B rácspont, akkor B -nek A körüli $+60^\circ$ -os elforgatottja is rácspont. Ezt használjuk fel. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az A_1, B_1, C_1 és D_1 rácspontok által meghatározott négyszög négyzet (a csúcsok körüljárása legyen pozitív). Jelölje $i = 1, 2, 3, \dots$ mellett $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ és D_{i+1} rendre B_i -nek A_i körüli, C_i -nek B_i körüli, D_i -nek C_i körüli és A_i -nek D_i körüli $+60^\circ$ -os elforgatottját. Az előbb mondottak értelmében a forgatásokkal kapott pontok mindegyike rácspont. A_{i+1} -nek az $A_i B_i$ egyenestől mért távolsága $\sqrt{3} \cdot A_i B_i / 2$, tehát kisebb, mint $A_i B_i$, ezért az $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ és D_{i+1} pontok mindegyike az $A_i B_i C_i D_i$ négyzet belsejében van (1. ábra).



1. ábra

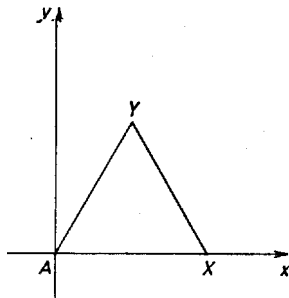
Ha az $A_i B_i C_i D_i$ és $A_{i+1} B_{i+1} C_{i+1} D_{i+1}$ négyszögeket $+90^\circ$ -kal elforgatjuk az $A_i B_i C_i D_i$ négyzet középpontja körül, az A_{i+1} pont B_{i+1} -be, a B_{i+1} pont C_{i+1} -be, a C_{i+1} pont D_{i+1} -be és a D_{i+1} pont A_{i+1} -be kerül, vagyis $A_{i+1} B_{i+1} C_{i+1} D_{i+1}$ is négyzet.

Így azt kaptuk, hogy az $A_1 B_1 C_1 D_1$ négyzet belsejében végtelen sok rácspont van, ez pedig ellentmondás.

Jakab Tibor (Budapest, Berzsényi D. Gimn.)

II. megoldás. Ismét indirekt módon bizonyítunk.

A rácspontokból álló négyzet csúcsait (a pozitív körüljárás irányában haladva) jelölje A, B, C és D . Az adott rácsot meghatározó háromszöggel egybevágó AXY pozitív körüljárású háromszög A csúcsában vegyük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját, és az AX félegyenes legyen az x tengely pozitív fele (2. ábra).



2. ábra

Mint ismeretes, azok és csak azok a P pontok lesznek rácspontok, amelyekre alkalmas α és β egész számokkal

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AX} + \beta \cdot \overrightarrow{AY}.$$

Ezért, s a feltevés alapján van olyan p, q, r, s egész szám, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= p \cdot \overrightarrow{AX} + q \cdot \overrightarrow{AY}, \\ \overrightarrow{AD} &= r \cdot \overrightarrow{AX} + s \cdot \overrightarrow{AY}. \end{aligned}$$

Mivel másrészt $\overrightarrow{AX}$ koordinátái $(1; 0)$ és $\overrightarrow{AY}$ koordinátái $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ azért

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &\left(p + \frac{q}{2}, \frac{q\sqrt{3}}{2}\right), \\ \overrightarrow{AD} &\left(r + \frac{s}{2}, \frac{s\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

A feltevés szerint $\overrightarrow{AD}$ az $\overrightarrow{AB}$ -nek $(+90^\circ)$ -os elforgatottja, ezért

$$\begin{aligned}p + \frac{q}{2} &= \frac{s\sqrt{3}}{2}, \\ -\frac{q\sqrt{3}}{2} &= r + \frac{s}{2}.\end{aligned}$$

Ezekből ellentmondás következik, hiszen pl. $\sqrt{3} = \frac{2p+q}{s}$, vagyis $\sqrt{3}$ racionális, ami nyilván nem igaz.

Kelemen Dezső (Kaposvár, Tácsics M. Gimn.)