

Legyen $A_n = 2(a_n - 1)$, akkor $A_0 = 2(c - 1) = C$, és

$$(2) \quad A_n = A_{n-1}^2 - 2 \quad n = 1, 2, \dots$$

Keressük A_n -et $A_n = P_n + Q_n$ alakban. A komponensekre vonatkozó

$$(3) \quad P_n + Q_n = P_{n-1}^2 + Q_{n-1}^2 + 2(P_{n-1}Q_{n-1} - 1)$$

rekurziót fel tudnánk oldani, ha sikerülne elérni, hogy az utolsó tag minden n -re eltűnjön:

$$(4) \quad P_{n-1}Q_{n-1} = 1.$$

Ez teljesül, ha biztosítjuk, hogy (3) tagonként

$$(3a) \quad P_n = P_{n-1}^2; \quad (3b) \quad Q_n = Q_{n-1}^2$$

is teljesüljön, Ebben az esetben ugyanis elég (4)-et $n = 1$ mellett biztosítani, hiszen ha (4) teljesül valamilyen n -re, akkor (3a) és (3b) szerint $(n + 1)$ -re is teljesül.

Legyen tehát P_0, Q_0 az

$$(5) \quad \begin{aligned} P_0Q_0 &= 1 \\ P_0 + Q_0 &= C \end{aligned}$$

egyenletrendszer gyöke (ha megoldásul komplex számokat is megengedünk, (5) tetszőleges C mellett megoldható). Ezekből a P_0, Q_0 számokból kiindulva képezzük a (3a), (3b) képzési szabállyal a P_n, Q_n számokat: ezekre (4) teljesülni fog minden n -re, és a belőlük kapott $A_n = P_n + Q_n$ sorozatra teljesül (2). Könnyen látható, hogy (3a), (3b) szerint

$$P_n = P_0^{2^n}, \quad Q_n = Q_0^{2^n} + 1).$$

Tehát

$$a_n = \frac{1}{2}(P_0^{2^n} + Q_0^{2^n}),$$

ahol P_0, Q_0 (5) gyökei, és (5)-ben $C = 2c - 2$.

Kollár János (Budapest, Piarista Gimn.)