

Jelöljük a jegyek összegét S -sel. Mivel S^n n -jegyű szám, azért

$$10^{n-1} \leq S^n < 10^n,$$

és így

$$(1) \quad \frac{10}{\sqrt[n]{10}} \leq S < 10.$$

Az $n = 1$ esetben nyilván minden egyjegyű szám megfelel a követelményeknek.

Ha $n \geq 2$, akkor (1) szerint $S \geq 10/\sqrt{10}$, tehát $S \geq 4$.

Az $S = 4, 5, 6$ számoknak nincs olyan hatványuk, mely megfelelne. A 4^n hatványok közül ugyanis csak a 4^2 hatvány jegyeinek száma egyenlő a kitevővel, de a jegyek összege itt sem egyenlő az alappal. Az $5^n, 6^n$ hatványokban pedig az utolsó jegy mindig 5, illetve 6, tehát a jegyek összege ($n \geq 2$ mellett) mindig nagyobb az alapnál.

Az $S = 7$ alap első és egyetlen megfelelő hatványa a negyedik: $7^4 = 2401$, jegyeinek összege 7. Az ezt követő $7^5, 7^6$ hatványoknak ugyanis már az utolsó jegye túl nagy (7 és 9), 7^7 pedig már csak hatjegyű.

Az $S = 8$ összegnek egyetlen megfelelő hatványa a köbe: $8^3 = 512$. Az $S^n - S$ különbség ugyanis osztható 9-cel, ha S^n megfelelő szám, hiszen S^n ugyanannyi maradékot ad a 9-cel való osztásnál, mint a jegyeinek az összege, ami egy megfelelő számnál éppen S . Emiatt $S = 8$ mellett csak azokat az n kitevőket érdemes vizsgálni, amelyek mellett $(S^{n-1} - 1)$ osztható 9-cel. Kilencel osztva 8 hatványai felváltva 8 és 1 maradékot adnak, így csak páratlan kitevő jöhet szóba. Ezek utolsó két jegye rendre:

$$8^3 = \dots 12, \quad 8^5 = \dots 68, \quad 8^7 = \dots 52, \quad 8^9 = \dots 28, \quad 8^{11} = \dots 92.$$

Ezek között 8^3 – mint láttuk – megfelel, 8^5 és 8^9 -ben már az utolsó jegy túl nagy, $8^7 = (2^{10})^2 \cdot 2$ -ben az első jegy 2, tehát az utolsó két jegyre kapott 5 és 2 túl nagy, végül $8^{11} < 10^{10}$, és ettől kezdve 8 hatványaiban a jegyek száma már kisebb a kitevőnél.

Ha végül $S = 9$, akkor $S^2 = 81$ az egyetlen megfelelő hatvány. Logaritmálva (1)-et, kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{n} \leq \lg 9,$$

tehát $n \leq 1(1 - \lg 9)$, azaz $n \leq 21$. Mivel 9 hatványai felváltva 9-re és 1-re végződnek, csak az 1 végződést adó, azaz páros kitevőjű hatványok jönnek szóba. Előállítjuk $9^2 = 81$ első 10 hatványának az utolsó három jegyét. Jelöljük 81^n -ben a százasként számát A_n -nel, a tízeseként B_n -nel, akkor

$$(100A_n + 10B_n + 1)(80 + 1) = 800A_n + (10A_n + B_n + 8)10 + 1.$$

Eszerint venni kell a $10A_n + B_n + 8 + 80A_n$ szám utolsó két jegyét:

$$\begin{aligned} 81^2 = \dots 561, \quad 81^3 = \dots 441, \quad 81^4 = \dots 721, \quad 81^6 = \dots 401, \quad 81^6 = \dots 481, \\ 81^7 = \dots 961, \quad 81^8 = \dots 841, \quad 81^9 = \dots 121, \quad 81^{10} = \dots 801. \end{aligned}$$

Tehát csak 81^5 és 81^9 jöhet szóba. Előállítjuk ezek utolsó négy jegyét:

$$81^2 = \dots 6561, \quad 81^4 = \dots 6721, \quad 81^8 = \dots 1841, \quad 81^5 = \dots 4401, \quad 81^9 = \dots 9121$$

tehát ezek sem felelnek meg.

Ezzel vizsgálatunkat befejeztük, lényegében a következő számokat találtuk megfelelőeknek: $n = 1$ -re: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; $n = 2$ -re: 81; $n = 3$ -ra: 512; $n = 4$ -re: 2401.