

Legyen P a tetraéder tetszőleges belső pontja, és mondjuk azt, hogy a tetraéder valamelyik lapja P -re nézve labilis, ha P -nek az illető lap síkján levő merőleges vetülete kívül van a testen. Megmutatjuk, hogy ha P -re egy bizonyos feltétel teljesül, akkor a tetraédernek legfeljebb két, a P -re nézve labilis lapja lehet. Ez a bizonyos feltétel olyan lesz, hogy az a súlypontra mindig teljesül; ezzel tehát belátjuk a feladat állítását. – Itt nem fogjuk megvizsgálni, hogy elképzelhető-e olyan tetraéder, melynek van olyan – a súlyponttól különböző – belső pontja, melyre ez a feltétel nem teljesül, csak megjegyezzük, hogy ilyen példa megadható.

Legyen tehát P egy adott pont a tetraéder belsejében, melynek egy bizonyos később tisztázandó tulajdonsága megvan. Ha a tetraéder valamelyik lapja P -re nézve labilis, P -től az illető lap felé a P -ből a lapra bocsátott merőleges mentén haladva előbb lépünk ki a tetraéderből, mintsem az illető lapot elérnénk, a merőleges egyenes előbb a tetraéder valamelyik másik lapját metszi. Mondjuk azt, hogy ez a másik lap P -ből nézve *takarja* az illető, P -re nézve labilis lapot.

Az ilyen, labilis lapokat takaró lapok mindig közelebb vannak P -hez, mint maga a labilis lap, hiszen már a labilis lapra merőleges egyenes mentén van a P -hez közelebbi pontjuk. Emiatt a P -hez legközelebbi lap nem lehet P -re nézve labilis, a többi lap ugyanis nem tudja takarni. Egy nem labilis lap – nevezzük az ilyet *stabil*nak – tehát tetszőleges P -re nézve létezik.

Jelöljük ennek a lapnak a síkját S_1 -gyel, P -nek S_1 -en levő vetületét P_1 -gyel. A PP_1 egyenes még egy pontban metszi a tetraéder felületét, jelöljük ezt Q -val, és az átmetszett lap síkját S_2 -vel. Ha S_2 stabil, akkor már csak a még nem említett lapok lehetnek labilisak, állításunk tehát igaz.

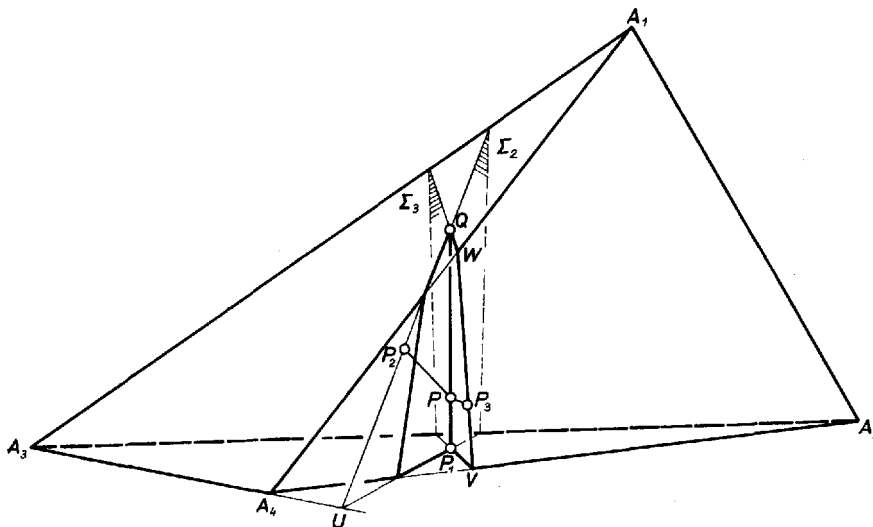
Előfordulhat azonban, hogy S_2 labilis. Jelöljük ekkor az S_2 -t takaró lap síkját S_3 -mal, a negyedik lapsíkot S_4 -gyel, és vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy S_3 stabilis legyen. S_3 -at S_2 nyilván nem takarhatja, hiszen S_3 közelebb van P -hez, mint S_2 . Megmutatjuk, hogy S_3 -at S_4 sem takarhatja, és ha P nincs túl közel S_1 -hez, pontosabban mondva, ha

$$(1) \quad PP_1 > \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot PQ,$$

akkor S_1 sem takarhatja S_3 -at. Ha tehát P -re teljesül (1), akkor vagy már S_2 stabilis, vagy ha ez nem is az, akkor S_3 biztosan az. – Amennyiben P a tetraéder súlypontja, akkor (1) teljesül, hiszen ekkor

$$\frac{PP_1}{PQ} \geq \frac{1}{3} > \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0,207.$$

Jelöljük a tetraéder S_i -vel szemközti csúcsát A_i -vel, P -nek S_i -n levő vetületét P_i -vel ($i = 1, 2, 3, 4$). A P_2 pontból a PQ szakasz derékszög alatt látszik, P_2 tehát rajta van a PQ feletti Thalész-gömbön. Ha S_3 takarja S_2 -t, azaz P_2 az S_3 síknak a tetraéderrel ellentétes oldalán van, akkor a PP_3P_2 szög tompaszög, tehát P_3 a PP_2 szakasz feletti Thalész-gömb belső pontja. Megmutatható, hogy ha adott egy G gömb, a G húrjai feletti Thalész-gömbök egyesítése egy, a G -vel koncentrikus gömböt tölt ki, amelynek a sugara G sugarának a $\sqrt{2}$ -szerese. Ha, P -re teljesül (1), a PQ feletti Thalész-gömböt a centrumából $\sqrt{2}$ -szeresére növelve, még mindig teljes egészében S_1 felett marad, ekkor tehát P_3 az S_1 -nek ugyanazon az oldalán van, mint maga a tetraéder, vagyis S_1 nem takarhatja S_3 -at.



Meg kell még mutatnunk, hogy ha S_3 takarja S_2 -t, akkor S_4 nem takarhatja S_3 -at. Jelöljük a PQ -n átmenő, S_i -re merőleges síkot Σ_i -vel ($i = 2, 3$). Σ_2 merőleges S_1 -re, tehát A_3A_4 -re is, így mindenesetre metszi azt, jelöljük a metszéspontot U -val. A P_1QU háromszögben P_1 -nél derékszög van, emiatt a P_1Q szakaszon levő P pont vetülete a QU szakaszon van. Ez a vetület nem más, mint P_2 , hiszen $\Sigma_2 \perp S_2$. Ha S_3 takarja S_2 -t, P_2 az S_3 -nak már a tetraédert

nem tartalmazó oldalán van, és így ott van U is, tehát U az A_3A_4 szakasz A_4 -en túli meghosszabbításán van. Emiatt az $A_2A_3A_4$ háromszögben A_4 -nél tompaszög van, és mivel $P_1U \perp A_3A_4$, azért P_1 -nek az A_2A_4 egyenesen levő vetülete az A_2A_4 szakaszon is rajta van, jelöljük ezt V -vel. Az is az $A_2A_3A_4$ háromszög és a P pont most megismert helyzetéből következik, hogy a P_1V egyenes az A_2A_3 szakaszt is metszi, Σ_3 tehát elválasztja A_2 -t az A_3, A_4 pontoktól. El kell választania Σ_3 -nak A_1 -et is az A_3, A_4 pontoktól, különben nem tartalmazhatná az $A_1A_3A_4$ háromszög Q pontját. Σ_3 tehát metszi az A_1A_4 szakaszt, jelöljük ezt a metszéspontot W -vel.

Tekintsük a QP_1VW négyszöget. Mivel ebben P_1 -nél derékszög van, P_3 a P_1Q egyenesnek ugyanazon oldalán van, mint maga a négyszög. Ha tehát P -ből P_3 felé haladva ki is lépünk a négyszögből, ezt csak a P_1V , vagy QW szakaszon át tehetjük, ami épp azt jelenti, hogy S_3 elé csak S_1 vagy S_2 állhat, de S_4 semmi esetre sem. – A bizonyítást ezzel befejeztük.