

Jelöljük a vizsgált kifejezést $p(A_1, A_2, A_3, A_4)$ -gyel, röviden p -vel. Ha az A_i események függetlenek, akkor $p = 0$, p maximumának emiatt pozitív, minimumának negatív számot várunk. Mivel az események valószínűsége 0 és 1 közötti szám (a határokat is beleértve), mindkét szélső érték abszolút értéke legfeljebb 1 lehet.

Maximumot úgy kapunk, ha a $B = A_1 A_2 A_3 A_4$ esemény valószínűsége nagy, és az $S = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)$ szorzat kicsi. Határozzuk meg először rögzített B mellett az S szorzat minimumát. Mivel B maga után vonja. A_i -t, $P(B) \leq P(A_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), és így $S \geq [P(B)]^4$. Itt az alsó határ elérhető, mégpedig az $A_i = B$ ($i = 1, 2, 3, 4$) helyettesítéssel. Elegendő tehát az

$$f(x) = x - x^4$$

függvénynek a $0 \leq x \leq 1$ szakasz feletti maximumát meghatározni. A függvény deriváltja eltűnik:

$$f'(x) = 1 - 4x^3 = 0,$$

ha $x^3 = \frac{1}{4}$, ekkor

$$f(x) = x(1 - x^3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0,4725.$$

Minimumot úgy kapunk, ha $P(B)$ kicsi, és S nagy. Az első bőségesen teljesül, ha B a lehetetlen esemény, ekkor várhatóan akkor legnagyobb az S , ha a teljes eseménytér mindegyik eseménye pontosan háromban van benne az A_i események közül, azaz $P(A_i) = \frac{3}{4}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) és ekkor $p = -\left(\frac{3}{4}\right)^4 = -0,3164$.

Ezt úgy lehet elérni, hogy felbontjuk az eseményteret négy egyenlő valószínűségű részre, jelöljük e részeket C_i -vel, és ezekkel az A_i -ket a következő módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 + C_2 + C_3, \\ A_2 &= C_1 + C_2 + C_4, \\ A_3 &= C_1 + C_3 + C_4, \\ A_4 &= C_2 + C_3 + C_4. \end{aligned}$$

Legyen általában $P(B) = x \geq 0$, és határozzuk meg S maximumát. Akkor

$$1 - x = P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4) \leq P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_4).$$

Célszerű emiatt S -et is az $\bar{A}_i$ eseményekkel előállítani:

$$S = [1 - P(\bar{A}_1)] [1 - P(\bar{A}_2)] [1 - P(\bar{A}_3)] [1 - P(\bar{A}_4)].$$

A számtani és mértani közép közti összefüggés szerint

$$S \leq \left(1 - \frac{P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_4)}{4}\right)^4,$$

és az előbbi egyenlőtlenség szerint ezt tovább növeljük, ha a második tag helyére $\frac{1-x}{4}$ -et írunk:

$$S \leq \left(1 - \frac{1-x}{4}\right)^4 = \frac{(3+x)^4}{4^4}.$$

Ezek szerint ha $P(B) = x$, akkor

$$p \geq x - \frac{(3+x)^4}{4^4},$$

ami monoton nő a $0 \leq x \leq 1$ szakaszon, tehát a minimuma $x = 0$ mellett van. Ezzel beláttuk, hogy a kezdetben talált érték a p minimuma.