

Először is megmutatjuk, hogy

$$(3) \quad f_n(x) = \begin{cases} q^{k-1}, & \text{ha } x \text{ tizedestört alakjában a } k. \text{ helyen} \\ & \text{szerepel először az 5-ös és } k \leq n, \\ 0, & \text{ha az első } n \text{ tizedesjegyben nincs 5-ös} \end{cases}$$

(amelyik számnak két tizedestört alakja van, annak a véges alakját használjuk, pl. $\frac{4}{5}$ -nél a $0,800\dots$ alakot használjuk és nem a $0,799\dots$ alakot).

Állításunk $n = 1$ -re igaz. Belátjuk, hogy ha n -re igaz az állításunk, akkor $(n + 1)$ -re is igaz. Tekintsük $f_{n+1}(x)$ -et. Ha x -ben az első n tizedesjegy között van 5-ös, akkor (3) szerint $f_n(x) > 0$, ezért $f_{n+1}(x) = f_n(x)$. Ha az első 5-ös a k -adik tizedesjegy, akkor $f_{n+1}(x) = f_n(x) = q^{k-1}$ ($k \leq n$). Ha x -ben az első 5-ös az $(n + 1)$ -edik tizedesjegy, akkor $f_{n+1}(x) = q^{n+1-1} = q^n$, hiszen x $(n + 1)$ -edik tizedesjegye 5-ös és $f_n(x)$ ennél az x -nél (1) miatt 0 volt. Végül ha x -ben az $(n + 1)$ -edik tizedesjegyre nincs 5-ös, akkor az indukciósfeltétel miatt $f_{n+1}(x) = 0$. Ezzel (3)-at beláttuk.

Az $f_n(x)$ függvény (3) alatti alakja szerint

$$a_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k q^{k-1},$$

ahol α_k mindazon szakaszok hosszának összege, amelyek részei a $(0; 1)$ intervallumnak és tetszőleges pontjuknak tizedestört alakjában a k -adik tizedesjegy 5-ös, de az előtte levők egyike sem az.

Az α_k számok meghatározása céljából osszuk fel a $(0; 1)$ intervallumot

10^k db $\frac{1}{10^k}$ hosszúságú, balról zárt, jobbról nyílt intervallumra. Közülük egy tetszőlegest kiválasztva, annak bal oldali végpontja $0, b_1 b_2 \dots b_k 00 \dots$ alakú, és az intervallumbeli összes szám első k tizedesjegye megegyezik. Így elegendő az intervallumok bal végpontját vizsgálni. Mivel a megfelelő bal végpontok száma 9^{k-1} , $\alpha_k = \frac{9^{k-1}}{10^k}$, így

$$a_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{9^{k-1} q^{k-1}}{10^k} = \frac{1}{10} \frac{\left(\frac{9}{10} q\right)^n - 1}{\left(\frac{9q}{10}\right) - 1}.$$

A keresett határérték ennek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1 - \frac{9q}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10 - 9q}, \quad \text{mert} \quad \frac{9q}{10} < 1.$$

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)