

Hagyjunk el egyet az $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ számok közül és vegyünk ki minden lehetséges módon a maradó $2n$ szám közül n -et, majd osszuk el ezek szorzatát az n kimaradó szorzatával. Jelölje az elhagyott számot x_k és a kapott $\binom{2n}{n}$ darab szám összegét A_k , ekkor a feladatban szereplő új számok S összegének $(n+1)$ -szeresére

$$(n+1)S = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_{2n+1} A_{2n+1},$$

aminek igazolására elég azt megjegyeznünk, hogy ez a kifejezés az $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ változóiban szimmetrikus és pl. az $\frac{x_1 x_2 \dots x_{n+1}}{x_{n+2} x_{n+3} \dots x_{2n+1}}$ számunk csak az $x_1 A_1, x_2 A_2, \dots, x_{n+1} A_{n+1}$ tagokban fordul elő, és minden ilyen tagban pontosan egyszer.

Mivel $2n$ szám közül n -et kiválasztva a maradók száma is n , azért az A_k -ban szereplő bármely tört reciproka is előfordul A_k -ban, vagyis az A_k összeg $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ számú olyan pár összege, amelyek mindegyikének tagjai egy tört és a reciproka. Tehát

$$A_k \geq \binom{2n}{n}$$

hiszen ismeretes, hogy egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2. Mivel S tagjainak száma $\binom{2n+1}{n+1}$ azért (1) alapján számtani közepük

$$\begin{aligned} \frac{S}{\binom{2n+1}{n+1}} &\geq \frac{x_1 \binom{2n}{n} + x_2 \binom{2n}{n} + \dots + x_{2n+1} \binom{2n}{n}}{(n+1) \binom{2n+1}{n+1}} = \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

amint a feladat állítja, hiszen

$$\binom{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Megjegyzések. 1. A megoldásból egyszerűen kiolvasható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n+1}$.

2. Megmutatható, hogy az egyenlőtlenség fennáll akkor is, ha az eredeti számok szorzata pozitív.