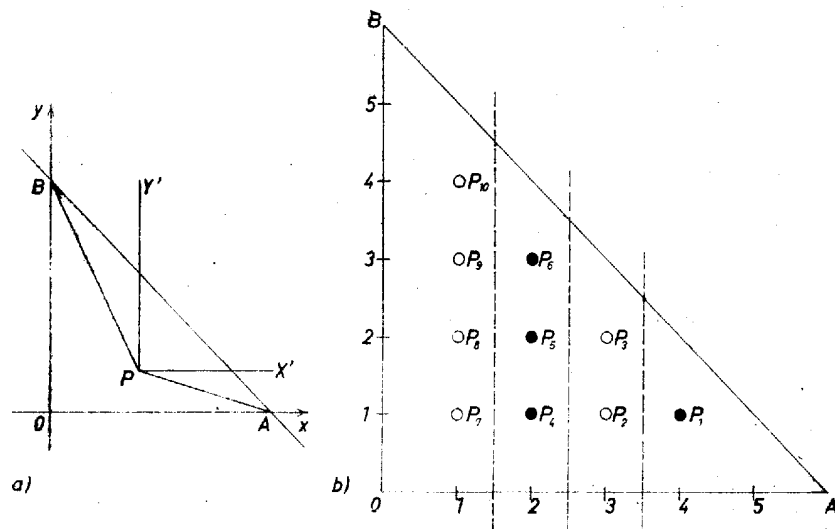


Legyen az OAB háromszög egy belső pontja P , és az ezen át az x, y tengely pozitív felével párhuzamos félegyenes PX' , ill. PY' (1 a ábra).



Ekkor a látószög mint a PB, PA félegyenesek irányszögének különbsége

$$APB \angle = X'PB \angle - X'PA \angle = \pi/2 + Y'PB \angle + APX' \angle,$$

ennek φ középértékét kell kiszámítanunk háromszögünk $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ rácspontjaira (1 b ábra):

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (Y'P_iB \angle + AP_iX' \angle) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{10} \sum_{i=1}^{10} AP_iX' \angle,$$

ugyanis alakzatunk (a háromszög és a benne levő rácspontok halmaza) szimmetrikus az $y = x$ egyenesre, ennek alapján a zárójel kétféle tagjából képezett összegek egyenlők.

A szögeket célszerű tangensük alapján mindjárt ívmértékben kiírni:¹

i	$\operatorname{tg} AP_iX' \angle = t_i$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} t_i$	Közép
1	$1/2 = 0,5$	0,4636	0,4636
2	$1/3 = 0,3333$	0,3217	
3	$2/3 = 0,6667$	0,5880	0,4578
4	$1/4 = 0,25$	0,2450	
5	$2/4 = 0,5$	0,4636	
6	$3/4 = 0,75$	0,6435	0,4542
7	$1/5 = 0,2$	0,1974	
8	$2/5 = 0,4$	0,3805	
9	$3/5 = 0,6$	0,5404	
10	$4/5 = 0,8$	0,6747	0,4518

A táblázat utolsó oszlopa az $i = 1, 3, 6, 10$ határokig bezárólag kapott ívmértékszámok középértékét tünteti fel. Közülük az utolsó a feladat eredeti kérdésére vonatkozik, az első három pedig a megfelelő eredmény $OA = 3, 4$, ill. 5 esetére. Eszerint (3 tizedesre kerekítve)

$$\varphi = (\varphi_6) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0,4518 = 2,474,$$

$$\varphi_3 = 2,498, \quad \varphi_4 = 2,486, \quad \varphi_5 = 2,479,$$

míg a közölt érték: $\pi - \log 2 = 3,1416 - 0,6931 = 2,4484 \dots$, ezt φ_6 alig többel, mint 1 %-kal haladja meg.

Megjegyzés. A P_1 -hez; a P_2 -höz és P_3 -hoz; a P_4 -hez, P_5 -höz és P_6 -hoz; valamint a P_7, P_8, P_9, P_{10} pontokhoz tartozó átlagok, külön-külön egy-egy (szokásos) közelítést adnak az

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$$

¹ Az iskolai függvénytáblázat-gyűjtemény 8. sz. táblázata.

integrálra. Nem egészen szabályos felső közelítések ezek, hiszen az utolsó, az $x = 1$ osztáspont-hoz tartozó függvényérték nem szerepel az átlagban. Azt mondhatjuk, véletlen, hogy még így is felső közelítést kaptunk. Mindenesetre, ha a beosztást finomítjuk, a mondott integrál értékét egyre pontosabban kapjuk meg, tehát e közelítő értékek súlyozott átlaga is tart az integrál értékéhez. Ennek az integrálnak a fenti számítás alapján kapott felső közelítő értékeit és a trapéz-szabályból kapott alsó közelítő értékeit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

n	Felső közelítés	Alsó közelítés
2	0,4636	0,4282
3	0,4548	0,4341
4	0,4507	0,4362
5	0,4482	0,4371

Ha tudjuk, hogy az

$$F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$$

függvény deriváltja épp $\arctan x$ aminek az ellenőrzéséhez a tanult deriválási szabályokon kívül csak az iskolai táblázatban is megtalálható

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

deriváltakat kell ismernünk), a fenti integrált pontos értékét is meghatározhatjuk a Newton-Leibniz-formula szerint:

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = F(1) - F(0) = \arctan 1 - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{\pi - \log 4}{4} = 0,4388.$$

A feladatban közölt átlagos látószöget a fenti megoldás szerint ebből úgy kapjuk, hogy a kétszereséhez hozzáadjuk a $\pi/2$ szöget, így valóban a $(\pi - \log 2)$ számot kapjuk.