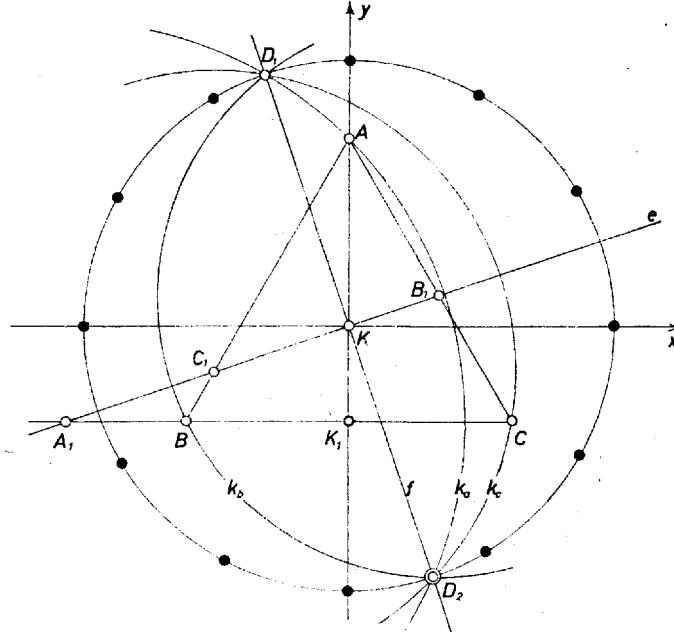


I. megoldás. 1. A feladatot a koordináta-geometria eljárásaival oldjuk meg. Vegyük origónak K -t, az x tengelyt BC -vel párhuzamosnak, irányítsuk az y tengelyt úgy, hogy A -n, a pozitív fele menjen át és válasszuk hosszúságegységnek a KA szakasz felét. Így a csúcsok: $A(0; 2), B(-\sqrt{3}; -1), C(\sqrt{3}; -1)$. Legyen másrészt az e metsző egyenes egyenlete $y = mx$, ahol a föltevések szerint egyrészt m véges és $m \neq \pm 1/\sqrt{3}$, másrészt – mivel A_1, B_1, C_1 mindegyike létrejött, e nem párhuzamos, egyik oldallal sem –, ezért $m \neq 0$ és $m \neq \pm\sqrt{3}$ (ugyanis ezek háromszögünk oldalegyeneseseinek iránytangensei, 1. ábra).



1. ábra

A BC, CA, AB oldalegyenes egyenlete rendre $y = -1, y = \mp\sqrt{3}x + 2$, és e -vel való metszéspontjaik koordinátái:

$$A_1\left(-\frac{1}{m}, -1\right), \quad B_1\left(\frac{2}{m+\sqrt{3}}, \frac{2m}{m+\sqrt{3}}\right), \quad C_1\left(\frac{2}{m-\sqrt{3}}, \frac{2m}{m-\sqrt{3}}\right).$$

A B_1 pont körüli, B -n átmenő k_b kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{2}{m+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y - \frac{2m}{m+\sqrt{3}}\right)^2 = \left(-\sqrt{3} - \frac{2}{m+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-1 - \frac{2m}{m+\sqrt{3}}\right)^2$$

(a jobb oldalt abból kapjuk, hogy a bal oldal értéke mindig annyi, mint amennyi akkor adódik, ha x, y helyére B koordinátáit írjuk), rendezve

$$(1) \quad K_b(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{4}{m+\sqrt{3}}(x+my) - 8 = 0.$$

Hasonlóan a C_1 körüli, C -n átmenő k_c kör, végül az A_1 körüli, A -n átmenő kör egyenlete:

$$(2) \quad K_c(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{4}{m-\sqrt{3}}(x+my) - 8 = 0,$$

$$(3) \quad K_a(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{m}(x+my) - 8 = 0.$$

2. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a k_b, k_c körök D_1, D_2 metszéspontjain a k_a kör is átmegy. D_1 és D_2 koordinátái kielégítik a $K_b(x, y) = 0$ és $K_c(x, y) = 0$ egyenleteket, ezért bármely két, λ_b, λ_c állandó számot véve, a

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_b \cdot K_b(x, y) + \lambda_c \cdot K_c(x, y) &= (\lambda_b + \lambda_c)(x^2 + y^2 - 8) - \\ &- 4\left(\frac{\lambda_b}{m+\sqrt{3}} + \frac{\lambda_c}{m-\sqrt{3}}\right)(x+my) = 0 \end{aligned}$$

egyenletet is. Mármost az állítást annak megmutatásával bizonyítjuk, hogy, ez az egyenlet λ_b , és λ_c alkalmas megválasztásával azonossá tehető k_a egyenletével. (4) azonos a (3)-mal, ha van olyan λ_b és λ_c , hogy bennük $(x^2 + y^2 - 8)$ és $(x+my)$ együtthatói rendre egyenlők:

$$\begin{aligned} \lambda_b + \lambda_c &= 1, \\ -4\left(\frac{\lambda_b}{m+\sqrt{3}} + \frac{\lambda_c}{m-\sqrt{3}}\right) &= \frac{-4m(\lambda_b + \lambda_c) + 4\sqrt{3}(\lambda_b + \lambda_c)}{m^2 - 3} = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Az utóbbiból az első fölhasználásával és kellő alakításával

$$\lambda_b - \lambda_c = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\frac{2(m^2 - 3)}{m} + 4m \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(m - \frac{1}{m} \right),$$

tehát a kívánt értékek:

$$\lambda_b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(m - \frac{1}{m} \right), \quad \lambda_c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(m - \frac{1}{m} \right).$$

[Pl. λ_b csak $m = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ és $m = \sqrt{3}$ mellett lehetne 0, ekkor $\lambda_c = 1$ és $K_c(x, y) \equiv K_a(x, y)$ $C_1 \equiv A_1 \equiv B$, ami kizárt eset.]

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk – anélkül, hogy D_1, D_2 koordinátáit meghatároztuk és k_a -ba helyettesítettük volna.

3. Most kiszámítjuk D_1, D_2 koordinátáit. Vonjuk ki (1)-ből (2)-t:

$$\left(\frac{4}{m - \sqrt{3}} - \frac{4}{m + \sqrt{3}} \right) (x + my) = \frac{8\sqrt{3}}{m^2 - 3} (x + my) = 0,$$

amiből (mivel $m \neq \pm\sqrt{3}$)

$$(5) \quad x + my = 0.$$

Innen $y = -x/m$ -et (1)-be helyettesítve rövid számítással $D_1(x_1, y_1)$ és $D_2(x_2, y_2)$ abszcisszája, ordinátája rendre:

$$(6) \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{8m^2}{m^2 + 1}}, \quad y_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{8}{m^2 + 1}}.$$

Eszerint D_1 és D_2 mindig egymás tükörképei K -ra nézve. Ezért a koordinátákat x_D -vel, y_D -vel jelölve, m kiküszöbölésével

$$x_D^2 + y_D^2 = 8,$$

tehát a három kör közös pontja – ha létrejön – mindig rajta van az ABC háromszög K középpontja körüli, $2\sqrt{2} = \sqrt{2}KA$ sugarú k_d körön.

4. Fordítva, meg kell vizsgálnunk, kiadódik-e k_d minden pontja D -ként. Eleve tudjuk azonban, hogy az m iránytényező kizárt 0, $\pm\sqrt{3}$, $\pm 1/\sqrt{3}$ értékei mellett (6) eredményeink nem érvényesek. Így pedig nincs olyan megengedett m , amely $x_D = 0$ -ra vezet, tehát k_d -nek az ordinátatengelyen – a KA egyenesen – levő pontjai nem tartoznak hozzá a h mértani helyhez. Másrészt olyan m sincs (6) szerint, amely $y_D = 0$ -ra vezetne, tehát k_d -nek a K -n át KA -ra merőlegesen (BC -vel párhuzamosan) húzott egyenesen levő pontjai sem tartoznak h -hoz. Az így kizárt 4 pontból újabb 4 – 4 kizárandó adódik K körüli, 120° -kal, illetve 240° -kal való elfordításukkal, hiszen ezek az elfordítások háromszögünket önmagába viszik át. Az újabb 8 pontra az ordináta és az abszcissza hányadosának abszolút értéke $\sqrt{3}$, illetve $1/\sqrt{3}$.

k_d -nek minden más D pontjára az $\frac{y_D}{x_D} = \mu$ hányados véges és a 0, $\pm 1/\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$ értékektől különböző szám és (5) mutatja, hogy ekkor $-1/\mu$ éppen az az m érték, mely a fentiek szerint D -t adja a 3 kör közös pontjaiként (és D -nek az origóra vonatkozó tükörképét, amelyre a hányados értéke ugyancsak μ).

Mindezek szerint a közös pontok mértani helye a k_d kör, a mondott 12 pont kihagyásával. (E pontok egy szabályos 12-szög csúcsai.)

Bacsó Gábor, Pallagi Dezső

Megjegyzések. 1. A fenti (5) – mint elsőfokú egyenlet – a k_b, k_c , körök f közös húregyenesének, *hatványvonalának*¹ egyenlete. Ugyanez adódik (1) és (3) különbségéből is, tehát f a k_b, k_a körpárnak is hatványvonala. A bizonyítást ezek alapján így is befejezhetjük: f csak 2 pontban metszi k_b -t és azokon áthalad k_c is, k_a is.

2. Eleve a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát használja fel a következő, a koordinátageometriainál jóval egyszerűbb megoldás.

II. megoldás. Nyilvánvaló, hogy a keresett mértani hely öröklí az ABC háromszög tengelyes és forgási szimmetriáit. Példaként véve két egymásba így át nem vihető e egyenest, azt sejtjük, hogy a keresett mértani hely egy K körüli kör (ill. a kizárt helyzetek miatt ennek része); ezt bizonyítjuk.

Legyen a háromszög magasságának hossza m , és messe AK a BC -t K_1 -ben. K -nak k_a -ra vonatkozó *hatványa*¹ a KA_1K_1 és AA_1K_1 derékszögű háromszögek alapján

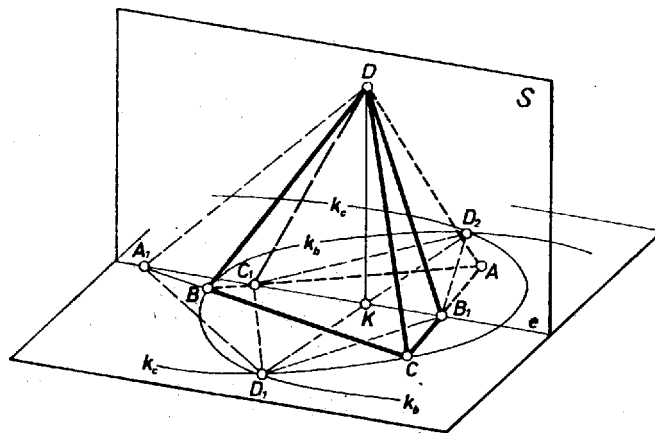
$$KA_1^2 - AA_1^2 = (KK_1^2 + K_1A_1^2) - (AK_1^2 - K_1A_1^2) = \frac{m^2}{9} - m^2 = -\frac{8}{9}m^2,$$

¹Lásd pl. *Tolnai Jenő*: Érdekes matematikai gyakorló feladatok, II. rész. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. 22. old.

állandó, független e helyzetétől, tehát ugyanennyi K -nak k_b -re, k_c -re vonatkozó hatványa is. Eszerint a K -ban e -re állított merőleget mindhárom kör ugyanabban a két pontban metszi (a hatvány negatív értéke miatt K mindhárom körben benne van). És ha e a K körül forgatva minden megengedett helyzetén átfut, a metszéspont-pár a K körül kört ír le, sugarának négyzete egyenlő a hatvány abszolút értékével:

$$KD_1 \cdot KD_2 = KD_1^2 = \frac{8}{9}m^2.$$

III. megoldás. A feladatot térgeometriai értelmezéssel oldjuk meg. Az ABC szabályos háromszöget egy $ABCD$ szabályos tetraéder alaplapjának vesszük – ekkor K a D csúcs merőleges vetülete az alapon –, az alakzatunkat származtató e egyenest pedig egy a DK magasságvonalon átmenő S sík és az alapsík metszévonalának tekintjük. Ekkor S a tetraéder DAB , DBC , DCA lapsíkját rendre a DC_1 , DA_1 , DB_1 egyenesben metszi, és ha B_1 , C_1 az alapháromszög területén vannak, akkor a DB_1C_1 háromszög a tetraéder és S metszésidoma (2. ábra).



2. ábra

Azt fogjuk belátni – a fenti jelöléseket tovább használva –, hogy a k_b , k_c körök D_1 , D_2 metszéspontjai azonosak a D csúcsnak azokkal az új helyzeteivel, ahová jut, ha a metszésidomot a B_1C_1 egyenes mint tengely körül az egyik vagy a másik irányban befordítjuk az alapsíkba.

Valóban, a DAC lapot AC körül az alaplapra ráfordítva D a B -be jut. S mivel eközben B_1 a helyén marad, a B_1B sugár egyenlő a metszésidom B_1D oldalával, és szerkesztésünk szerint $D_1B_1 = D_2B_1 = BB_1 = DB_1$.

A meg gondolást megismételve a DAB lappal, kapjuk, hogy $D_1C_1 = D_2C_1 = CC_1 = DC_1$, ezek alapján a $D_1B_1C_1$, a $D_2B_1C_1$ és a DB_1C_1 háromszögek egybevágók, ennél fogva mint e háromszögek megfelelő szakaszaira:

$$D_1K = D_2K = DK, \text{ állandó.}$$

Azt kaptuk, hogy a k_b , k_c körök metszéspontjai a metsző egyenes (és az S sík) minden megengedett helyzetében azon a k_d körön adódnak, amelynek középpontja K és sugara a tetraéder magassága. Mivel pedig KD és vele együtt KD_1 , KD_2 is merőleges B_1C_1 -re, azt is kaptuk, hogy k_b , k_c köreink D_1D_2 közös húregyenesre mindig átmegy K -n.

A k_a kör amiatt halad át D_1 -en és D_2 -n, mert D -t BC körül az alapsíkba fordítva, A -ba jut, ezért $A_1A = A_1D$, másrészt A_1 is a B_1C_1 egyenes pontja, tehát a metszésidom lefordításával $A_1D = A_1A$ hossza az A_1D_1 , A_1D_2 szakaszokban valódi nagyságában látszik. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Már csak annak a vizsgálata van hátra, hogy a k_d kör mely pontjai tartoznak hozzá a h mértani helyhez. Láttuk, hogy a D_1D_2 szakasz k_d -nek S -re, egyszersmind e -re merőleges átmérője: e -nek minden olyan helyzete figyelembe veendő, mely különböző a KA , KB , KC egyenestől is a rájuk K -ban állított merőlegetől, tehát a kizárt helyzetek száma 6. Így ki van zárva h -ból k_d -nek az a $6 \cdot 2 = 12$ pontja, melyek e 6 kizárt egyenesre merőleges átmérő végpontjai. Fordítva, k_d -nek minden más D_1 pontjához úgy kapjuk e -nek a D_1 -et előállító helyzetét, hogy merőleget állítunk K -ban KD_1 -re. Más kizárt pont tehát nincs.