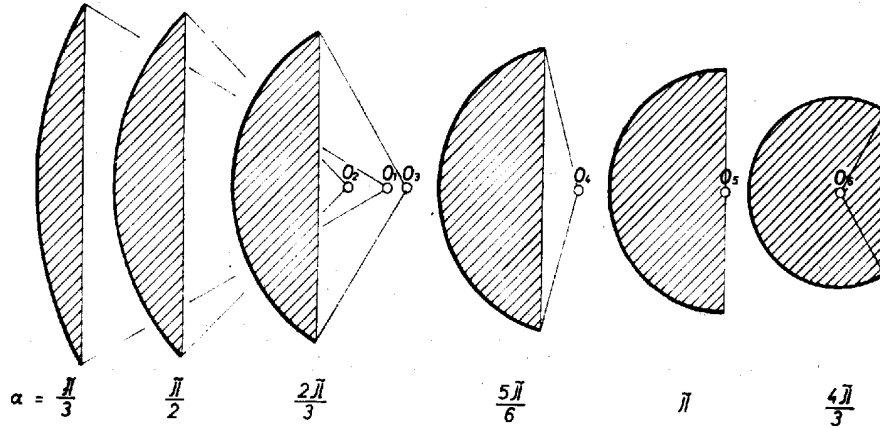


Az r sugarú kör α középponti szögű ívével ($0 < \alpha \leq 2\pi$) és a végpontjai közti húrral határolt körszelet területe:

$$T = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin \alpha).$$

Válasszuk az adott hosszúságot egységnyinek, azaz $r\alpha = 1$, így $r = \frac{1}{\alpha}$ és

$$T(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^2}.$$



Rögtön látjuk, hogy ez a függvény minden $\alpha \neq 0$ helyen deriválható, így ha van maximuma a vizsgált intervallum belsejében, akkor ott $T'(\alpha) = 0$. A derivált, mindjárt alkalmas goniometrikus alakítással:

$$\begin{aligned} T'(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha^3} [2 \sin \alpha - \alpha(1 + \cos \alpha)] = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\alpha^3} \cdot \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^3} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Az utolsó alak zárójelbeli kifejezése $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, azaz $0 < \alpha < \pi$ esetében pozitív, $\pi < \alpha < 2\pi$ esetén negatív, és mindezekre az értékekre az első tényező pozitív. Eszerint $0 < \alpha < \pi$ esetén $T'(\alpha) > 0$, viszont $\pi < \alpha < 2\pi$ esetén $T'(\alpha) < 0$.

Az utolsó előtti alakból viszont látjuk, hogy a derivált $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$, azaz $\alpha = \pi$ esetén is értelmezve van és értéke $T'(\pi) = 0$. Csak itt lehet szélsőérték, és a derivált előjelére mondottak szerint itt szoros értelemben vett maximuma van $T(\alpha)$ -nak.

A szóban forgó terület tehát akkor a legnagyobb, ha az adott hosszúságot félkör alakúra hajlítjuk, és ekkor értéke $T = \frac{1}{2\pi}$.