

I. megoldás. Az állítást k -ra vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Ha $k = 1$, akkor (1) két oldala azonos, az állítás igaz. Feltéve, hogy (1) igaz valamely k kitevőre, ezt felhasználva

$$[1 - (1 - x)^n]^{k+1} = [1 - (1 - x)^n] \cdot [1 - (1 - x)^n]^k \geq [1 - (1 - x)^n] \cdot [1 - (1 - x^k)^n],$$

ahhoz tehát, hogy az állítás $(k + 1)$ -re is teljesül, elég igazolni a következőket:

$$[1 - (1 - x)^n] \cdot [1 - (1 - x^k)^n] \geq 1 - (1 - x^{k+1})^n,$$

illetve a bal oldali nagy zárójeleket felbontva, hogy

$$(1 - x^{k+1})^n - (1 - x)^n \geq (1 - x^k)^n - [(1 - x)(1 - x^k)]^n.$$

Jelöljük itt az egymás utáni n -edik hatványok alapjait röviden rendre a, b, c, d betűvel. Így könnyebb látni, hogy

$$(2) \quad a \geq c \geq 0, \quad b \geq d \geq 0 \text{ és}$$

$$(3) \quad a - b = c - d \geq 0$$

és a bizonyítandó állítás így alakul

$$(4) \quad a^n - b^n = c^n - d^n.$$

A (2)-ből $m = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$a^{n-m}b^{m-1} \geq c^{n-m}d^{m-1},$$

ezt a mondott m értékekre összeadva, majd a kapott $(n - 1)$ -edfokú polinomok közül a bal oldalt $(a - b)$ -vel, a jobb oldalt $(c - d)$ -vel szorozva, egy ismert azonosság és (3) figyelembevételével éppen (4) adódik. Ezzel az állítást igazoltuk.

Könnyen látható, hogy (1)-ben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha legalább egy fennáll a következő egyenlőségek közül:

$$n = 1, \quad k = 1, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Bacsó Gábor (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladat állítását valószínűségszámítási értelmezéssel igazoljuk. Fessük egy n sorból és k oszlopból álló sakktábla mezőit egymástól függetlenül feketére vagy fehérre, és jelöljük A -val azt az eseményt, hogy a táblának minden egyes sorában adódott legalább egy fekete mező, B -vel pedig azt, hogy minden oszlopban adódott legalább egy fehér mező. Az A és B események közül legalább az egyik biztosan bekövetkezik a tábla minden teljes kifestésében, különben ugyanis volna olyan sor, amelyben minden mező fehér, és volna olyan oszlop is, melyben minden mező fekete, ami pedig együtt lehetetlen. Így a szokásos jelölésekkel

$$(5) \quad 1 = P(A + B) \leq P(A) + P(B).$$

Ha most bármely mező fehérre festésének valószínűsége x , akkor

$$(6) \quad P(A) = (1 - x^k)^n,$$

ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy kiszemelt sorban mind a k mezőt fehérre festettük: x^k ; ezért annak a valószínűsége, hogy ebben a sorban van legalább egy fekete mező: $(1 - x^k)$; ebből, egymás után mind az n sort véve, adódik (6). – Hasonlóan látható be, hogy

$$(7) \quad P(B) = [1 - (1 - x)^n]^k,$$

és (6)-ot és (7)-et (5)-be behelyettesítve, átrendezéssel éppen az állítást kapjuk.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Ezzel a megfontolással a következő állítás is igazolható:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \prod_{j=1}^k x_{i,j} \right) \geq 1 - \prod_{j=1}^k \left(1 - \prod_{i=1}^n x_{i,j} \right),$$

ahol $0 \leq x_{i,j} \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, k$).