

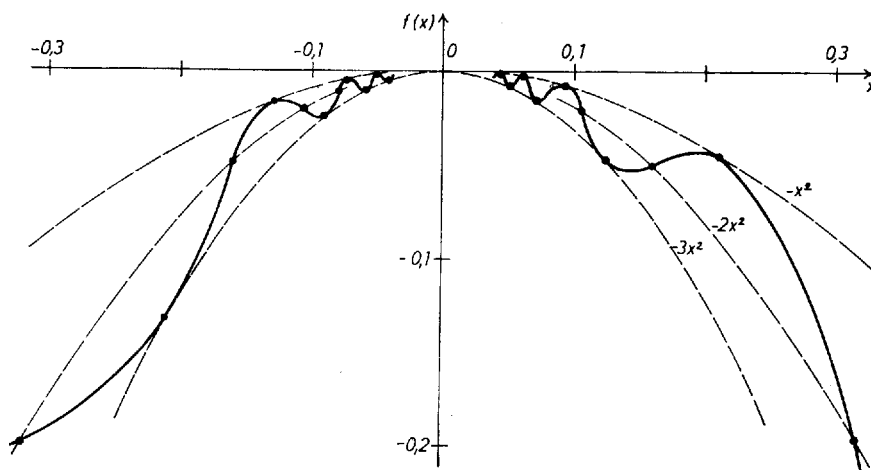
Legyen

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + 2 \right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ekkor minden $a \neq 0$ mellett $f'(a) = -2a \left(\sin \frac{1}{a} + 2 \right) + \cos \frac{1}{a}$, továbbá $f'(0) = 0$, mert

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -x \left(\sin \frac{1}{x} + 2 \right) \right\} = 0.$$

Az $f(x)$ függvénynek az $x = 0$ helyen maximuma van, mivel $x \neq 0$ esetén $\sin \frac{1}{x} + 2 > 0$ és $-x^2 < 0$ miatt $-x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + 2 \right) < 0$, és $f(0) = 0$.



Megmutatjuk, hogy $f'(x)$ nem vált előjelet a 0-ban.

Az $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ sorozatra: $x_n \rightarrow 0$ és

$$f'(x_n) = -\frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi + 2) + \cos 2n\pi = 1 - \frac{2}{n\pi} > 0,$$

$$\text{az } y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \text{ sorozatra pedig } y_n \rightarrow 0 \text{ és}$$

$$f'(y) = -\frac{2}{(2n+1)\pi} (\sin(2n+1)\pi + 2) + \cos(2n+1)\pi = -1 - \frac{4}{(2n+1)\pi} < 0.$$

Azt kaptuk, hogy a 0 bármely kis környezetében a derivált lehet negatív is, pozitív is. Az állítást ezzel beláttuk.

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn.)

Megjegyzés. Természetesen más függvényt is találhatunk, amely hasonló tulajdonsággal bír.