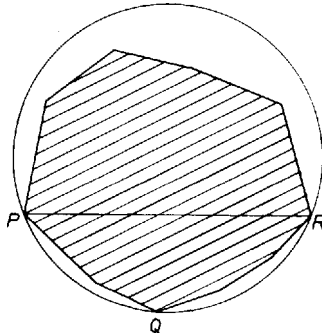


Nevezzük a sokszög három csúcsát lefedő hármasknak, ha az általuk meghatározott kör lefedi a sokszöget. Egy fedő hármask *mérete* legyen az a legkisebb természetes k szám, amelyhez megadható a sokszög k szomszédos csúcsa úgy, hogy azok között a mondott három csúcs is szerepel. Azt fogjuk megmutatni, hogy a minimális méretű fedő hármask mérete 3, azaz a benne szereplő csúcsok szomszédosak.

Ehhez először be kell látnunk, hogy egyáltalán van fedő hármask. Ennél többet is állíthatunk: a sokszög tetszőleges két szomszédos csúcsa kiegészíthető fedő hármassá. Nézzük meg ugyanis, mekkora szög alatt látszik a két szomszédos csúcs által meghatározott szakasz a többi csúcsból – és vegyük e látószögek minimumát (vagy ha ilyen több volna, azok egyikét). A minimális látószöget adó csúcson és az eredeti két csúcson átmenő kör lefedi a sokszöget, hiszen a választott oldal minket érdeklő oldalán ez a körlap a mértani helye mindazon pontoknak, amelyekből az illető oldal legalább ω látószög alatt látszik.

Tehát a fedő hármask halmaza nem üres. Mivel a halmaznak csak véges sok eleme van, van a halmaz elemei között minimális méretű. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy e minimális méret nagyobb 3-nál, mondjuk k . Jelöljük a csúcsokat P , Q , R -rel, feltevésünk szerint P -től Q -n át R felé haladva rajtuk kívül még $(k - 3)$ pontot érintünk, és tegyük fel még azt is, hogy mindjárt P és Q között is van még csúcs.



Nézzük meg, mekkora szög alatt látszik ezekből a PQ szakasz, és válasszuk azt a csúcsot, amelyre ez a látószög maximális. Jelöljük ezt a csúcsot S -sel, akkor P , S , Q fedő hármask, és mérete k -nál kisebb. Ez utóbbi nyilvánvaló, az előbbi pedig következik abból, hogy e maximális látószög sem lehet nagyobb, mint az eredeti kör R -et nem tartalmazó PQ ívéhez tartozó kerületi szög. Emiatt a PQ egyenes R -et tartalmazó oldalán az eredeti kör teljes egészében az új körben van benne, PQ R -et nem tartalmazó oldalán pedig, S választása miatt van minden csúcs benne az új körben. PQR , tehát nem volt minimális, ellentmondásra jutottunk. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.