

$$(1) \quad |x_0 - x_1| \leq n \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|.$$

I. megoldás. Legyenek az $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ polinom gyökei valamilyen sorrendben: $x_1, x_2, \dots, x_n$, valamennyien valósak (nem lényeges, hogy vannak-e köztük egyenlők). Ha valamely i -re ($1 \leq i \leq n$) $x_0 = x_i$, tehát $f(x_0) = 0$, és $f'(x_i) \neq 0$, akkor (1)-ben x_1 szerepére vehető maga x_i így mindkét oldal értéke 0, az állítás igaz. A továbbiakban már csak az $x_0 \neq x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $f'(x_0) \neq 0$ feltételeknek eleget tevő helyeket tekintjük, s mivel így $f(x_0) \neq 0$, az állítás ekvivalens az (1) reciprokával: $\dots$ x_0 -hoz van olyan i index, hogy

$$(2) \quad \frac{1}{|x_0 - x_i|} = \frac{1}{n} \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right|.$$

Ezt fogjuk bizonyítani.

Ismeretes, hogy $f(x)$ osztható mindegyik $(x - x_i)$ gyöktényezőjével, és írható ezek szorzataként:

$$(3) \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

(Más tényező nincs, mert $f(x)$ -ben x^n együtthatóját 1-nek vettük az n -ed fokúság biztosítására; az így bebizonyított állítás $a_0 \neq 0$ mellett $a_0 f(x)$ -re is érvényes.)

Ebből az alakból könnyű képezni $f'(x)$ -et, miután a két tényezős szorzat $(uv)' = u'v + v'u$ deriválási szabályát – amely $v = 1$ -et véve már egy tényezős „szorzatra” is érvényes – teljes indukcióval $n > 2$ -re általánosítottuk. Ezt az olvasóra hagyva, csak az eredményt mondjuk ki: n tényezős szorzat deriváltja n tagból áll, mindegyik tag n tényezős szorzat, rendre egy tényezőt deriválunk és ezt szorozzuk a többi – változatlanul hagyott – tényező szorzatával. (Ez természetesen csak olyan helyen érvényes, ahol mindegyik tényező deriválható; feladatunkban mindenütt.) (3)-ból pl. $(x - x_1)' = 1$ alapján $f'(x)$ első tagja:

$$(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

amit célszerű egyszerűbben

$$\frac{f(x)}{x - x_1}$$

alakban írni, hiszen ahol $f'(x)$ -et használni fogjuk, x_0 -ban, ott a nevező nem 0, és ez áll $i = 2, \dots, n$ mellett $(x - x_i)'$ esetére is. Eszerint ha $x \neq x_i$ úgy

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{f(x)}{x - x_n},$$

ezért, mindjárt (2) jobb oldala céljára alakítva

$$(4) \quad \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| = \left| \frac{1}{x_0 - x_1} + \dots + \frac{1}{x_0 - x_n} \right| \leq \leq \frac{1}{|x_0 - x_1|} + \frac{1}{|x_0 - x_2|} + \dots + \frac{1}{|x_0 - x_n|}.$$

A jobb oldalt növeljük, ha mindegyik tagja helyére a legnagyobbik tagját írjuk – vagy ha mind az n tag egyenlő, akkor változatlan marad. Legyen az a tag, vagy a legnagyobb tagok egyike $\frac{1}{|x_0 - x_k|}$ ekkor (4) így alakul:

$$\left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \leq n \frac{1}{|x_0 - x_k|}.$$

Eszerint x_k megfelel a (2)-ben említett gyök szerepére, az állítást bebizonyítottuk.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha minden i -re $|x_0 - x_i|$ értéke egyenlő. Ez kétféleképpen állhat elő:

α) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, n -szeres gyök, $f(x) = (x - x_1)^n$, és x_0 bármely, kivéve x_1 -et;

β) alkalmas indexezés mellett $x_1 = x_2 = \dots = x_r \neq x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n$ ($1 \leq r \leq n - 1$) esetében kizárólag az $x_0 = (x_1 + x_n)/2$ helyen.

Eredményünket konkrétan is kimondhatjuk. A kiválasztási feltétel szerint $|x_0 - x_k|$ a legkisebb az $|x_0 - x_i|$ értékek közül ($i = 1, 2, \dots, n$), tehát az állításban mindenesetre megfelel $f(x)$ -nek az x_0 -hoz legközelebbi zérushelye. Ebben a megfogalmazásban az előre elintéztet esetleges $x_0 = x_i$ eset is benne van. (Természetesen esetenként megfelelhet más gyök is.)

Megjegyzések. 1. Az állításnak szemléletes jelentést tulajdoníthatunk a polinomot ábrázoló görbe $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintőjével kapcsolatban. Mivel $f'(x_0) \neq 0$, ez az érintő metszi az x -tengelyt, és pedíg az x_0 ponttól $f(x_0) : f'(x_0)$ távolságban (előtte vagy utána). Azt bizonyítottuk be, hogy ezt a távolságot n -szer fölmérve x_0 -tól mindkét irányban, a két végpont közti intervallumban van gyöke a polinomnak ha csak tudjuk, hogy polinomunknak minden gyöke valós. Ennek speciális esete az $f(x) = x^2$, melyre $x_1 = x_2 = 0$, ennek $x \neq 0$ esetén – mint ismeretes – az (x, x^2) pontbeli érintőjét megadja a pontot az $(\frac{x}{2}, 0)$ ponttal összekötő egyenes.

Császár Gyula (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

2. A gyökök valós voltára vonatkozó föltevést csak burkoltan, (4)-ben és utána használtuk fel. így nem merül fel az a probléma, hogy mit értünk végzett lépéseinken akkor, ha nem minden gyöke valós az $f(x)$ -nek, esetleg egy sem valós.

II. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$ esetén azt kell belátnunk, hogy az $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ polinomnak, amelyre $a \neq 0$ és $b^2 - 4ac \geq 0$, $x_0 \neq -\frac{b}{2a}$ esetén x_1 és x_2 gyökei közül valamelyikre – jelöljük ezt x_2 -vel – teljesül

$$(5) \quad |x_0 - x_2| = 2 \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|.$$

Ugyanis $f'_2(x) = 0$ csak a kizárt érték mellett áll.) Hozzáteesszük ehhez, hogy az állítást itt is és tetszőleges n esetén is az x_0 -hoz legközelebbi gyökre bizonyítjuk; tehát speciálisan $n = 2$ mellett a fentiek alapján $|x_0 - x_2| \leq |x_0 - x_1|$.

Ha $x_0 = x_2$, azaz $f_2(x_0) = f_2(x_2) = 0$, akkor (5) nyilvánvalóan teljesül az egyenlőség jelével. Ha $x_0 \neq x_2$, akkor $x_0 \neq x_1$ is fennáll és

$$\begin{aligned} f_2(x) &= a(x - x_2)(x - x_1), \\ f'_2(x) &= a(x - x_2) + a(x - x_1), \end{aligned}$$

és (5) teljesül, mert a jobb oldal reciprokára

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f'_2(x_0)}{f_2(x_0)} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|a(x_0 - x_2)| + |a(x_0 - x_1)|}{|f_2(x_0)|} \leq \frac{|a(x_0 - x_1)|}{|x_0 - x_2| \cdot |a(x_0 - x_1)|} = \frac{1}{|x_0 - x_2|},$$

és innen, véve az első és az utolsó kifejezés reciprokát, (5)-öt kapjuk.

Föltesszük ezután, hogy az állítás helyes minden $(n - 1)$ -ed fokú polinomra (és természetesen a korlátozásnak megfelelően választott x_0 -ra). A vizsgálandó $f_n(x)$ valódi n -ed fokú polinomot x_0 megadása és a hozzá legközelebbi gyök megkeresése után – jelöljük ezt a gyököt x_n -nel – így alakítjuk:

$$(6) \quad f_n(x) = (x - x_n) \cdot f_{n-1}(x),$$

ahol $f_{n-1}(x)$ az az $(n - 1)$ -edfokú polinom, melynek gyökei az $f_n(x)$ -nek $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, gyökei, és benne x^{n-1} együttthatója egyenlő $f_n(x)$ -ben x^n együttthatójával, tehát $f_{n-1}(x)$ valódi $(n - 1)$ -ed fokú polinom. Ekkor

$$(7) \quad f'_n(x) = (x - x_n) \cdot f'_{n-1}(x) + f_{n-1}(x),$$

$$f_n(x_0) = (x_0 - x_n) \cdot f_{n-1}(x_0),$$

$$(8) \quad f'_n(x_0) = (x_0 - x_n) \cdot f'_{n-1}(x_0) + f_{n-1}(x_0).$$

$\alpha)$ Ha $f'_{n-1}(x_0) = 0$, akkor (8) alapján $f_{n-1}(x_0) \neq 0$, és (7) alapján (1) jobb oldala így alakul:

$$n \left| \frac{f_n(x_0)}{f'_n(x_0)} \right| = n|x_0 - x_n| > |x_0 - x_n|,$$

tehát (1) teljesül.

$\beta)$ Ha $f'_{n-1}(x_0) \neq 0$, és x_0 gyöke $f_n(x)$ -nek, azaz $x_0 = x_n$, akkor (1) az egyenlőség jelével érvényes. Ha pedig x_0 nem gyöke $f_n(x)$ -nek, tehát $f_{n-1}(x)$ -nek sem, akkor (8)-ból és (6)-ból (1) jobb oldala céljára

$$\frac{f'_n(x_0)}{f_n(x_0)} = \frac{f'_{n-1}(x_0)}{f_{n-1}(x_0)} + \frac{1}{x_0 - x_n},$$

ezért

$$(9) \quad \left| \frac{f'_n(x_0)}{f_n(x_0)} \right| \leq \left| \frac{f'_{n-1}(x_0)}{f_{n-1}(x_0)} \right| + \left| \frac{1}{x_0 - x_n} \right|.$$

És mivel az indukciós feltevés alapján van olyan gyöke $f_{n-1}(x)$ -nek – mondjuk x_{n-1} –, amelyre

$$\left| \frac{f'_{n-1}(x_0)}{f_{n-1}(x_0)} \right| \leq (n-1) \frac{1}{|x_0 - x_{n-1}|} \leq \frac{n-1}{x_0 - x_n}.$$

hiszen $|x_0 - x_{n-1}| \geq |x_0 - x_n|$. Eszerint (9)-ből

$$\left| \frac{f'_n(x_0)}{f_n(x_0)} \right| \leq \frac{n}{|x_0 - x_n|},$$

ami ekvivalens (1)-gyel. Minden lehetséges esetet áttekintettünk, a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Ebből a bizonyításból könnyű látni, hogy $n = 2$ esetén az x_0 -tól távolabbi x_1 gyökre – természetesen ha $x_1 \neq x_2$ – az állítás nem teljesül; ekkor $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$ sem teljesülhet, mert belőle $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ következne, ott pedig $f'_2(x_0) = 0$ lenne.