

$$(1) \quad \binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \binom{2n}{3}^2 + \dots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Megmutatjuk, hogy az állítás bal oldalán álló kifejezés az

$$(x-1)^{2n}(x+1)^{2n}$$

polinom kifejtett alakjában  $x^{2n}$  együtthatója, a jobb oldal pedig

$$(x^2-1)^{2n}$$

kifejtésében  $x^{2n}$  együtthatója. Ezek alapján az állítás abból következik, hogy a mondott két kifejezés – mint a hatványozási azonosságok alapján kifejtés nélkül látható – azonos egymással, kifejtésükben a megfelelő hatványok együtthatói egyenlők.

Valóban, utóbbi állításunkon nincs mit bizonyítani, az első polinom céljára pedig kifejtéssel

$$\begin{aligned} (x+1)^{2n} &= \binom{2n}{0}x^{2n} + \binom{2n}{1}x^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{k}x^{2n-k} + \dots + \binom{2n}{2n}, \\ (-1+x)^{2n} &= \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1}x + \dots + (-1)^{2n-k}\binom{2n}{k}x^k + \dots + \binom{2n}{2n}x^{2n}, \end{aligned}$$

és a kifejtések tagonkénti összeszorzásában akkor és csak akkor kapjuk az  $x^{2n}$  hatványt, ha a párba kapcsolt két tagban  $x$  kitevőinek összege  $2n$ , vagyis a fenti elrendezésben éppen az egymás alatt-fölött álló tagok párba állításával. Az ezek együtthatóiból képzett szorzatok összege pedig láthatóan (1) baloldala. Ezzel a bizonyítást befejeztük.