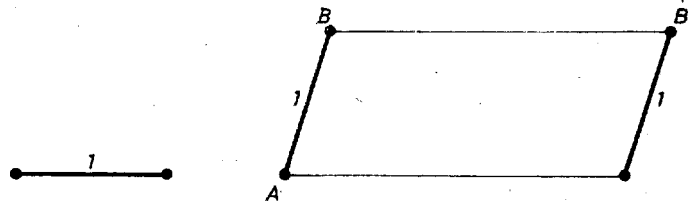


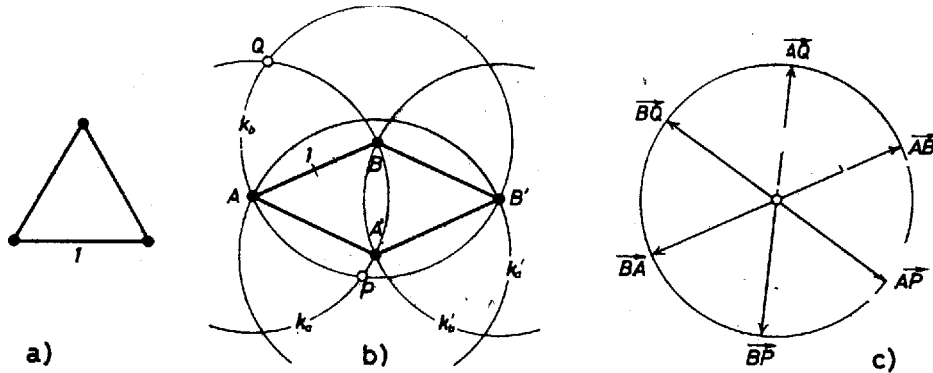
Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk, egy a követelménynek megfelelő ponthalmazt S_m jelölünk.

$m = 1$ esetében S_1 -re legegyszerűbb példa egy tetszőleges egységszakasz két végpontja, de megfelel a végpontok halmaza akárhány, de véges számú egységszakasz egyesítésében is, ha bármely két nem ugyanazon egységszakaszból származó végpont távolsága 1-től különböző. Az 1. ábra második példáján speciálisan $AB = 1$ és $A'B' \# AB$; itt azt is mondhatjuk, hogy S_1 az $\overrightarrow{AB}$ egységszakasz és $AA' > 2$ az abszolút értékű vektorral eltolta képe alkotja, és még azt is, hogy az AA' szakasz és ennek az $\overrightarrow{AB}$ egységvektorral eltolta képe alkotja S_1 -et (így sem AB' , sem BA' nem lehet egységnyi).



1. ábra

S_2 -re a legegyszerűbb példák: egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcspontjai, valamint egységnyi oldalú rombusz csúcsai, hacsak a rombusznak egyik átlója sem egységnyi, vagyis a rombusz bármelyik csúcsa körüli, egységnyi sugarú kör pontosan 2 csúcson megy át (2. ábra). Tovább körön mindig egységnyi sugarú kört értünk.



2. ábra

Visszatérve a rombuszra, ezt most úgy tekintjük, hogy az AB egységszakaszt egy $\overrightarrow{AA'}$ egységvektorral toltuk el. Ehhez A' -t az A körüli k_a körön kell vennünk, kivéve azonban a B pontját, mert akkor A -tól csak 1 pont lenne egységnyire, B -től pedig 2. Nem vehetők A' szerepére továbbá k_a -nak a B körüli k_b körrel alkotott P, Q metszéspontjai, mert így B -től 3 pont lenne egységnyire. B' -t az A' körüli kör metszi ki k_b -ből. Ugyanezeket mondhatjuk el B -ről, ha a rombuszt AB -nek a $\overrightarrow{BB'}$ -ral való eltolásával képeznénk; az így kizárt három vektor a fentebbi háromnak az AB szakasz felezőpontjára való tükröképe (az ábra c része).

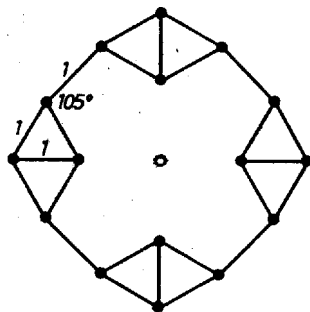
A rombusz példájának elemzésével tulajdonképpen eljárásmintát dolgoztunk ki tetszőleges m mellett S_m -ből egy megfelelő S_{m+1} kifejesztésére:

S_m -et egyesítjük egy olyan S'_m , képével, amelyet belőle egy alkalmas egységvektorral való eltolás útján hozunk létre. Tegyük fel tehát, hogy létezik a követelményt kielégítő S_m , ahol $m \geq 2$, és legyen egy ilyen $S_m = \{A, B_1, B_2, \dots, B_m, C, D, \dots, G\}$, ahol $B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ az A -tól 1-re levő pontok $AC, AD, \dots, AG \neq 1$, az elemek száma $r (\geq m + 1)$, továbbá $S'_m = \{A', B'_i, \dots, G'\}$.

Az eltolást az $\overrightarrow{AA'}$ -val definiálva, A' az A körüli k_a egységgörön választandó. Azt mutatjuk meg, hogy ez mindig lehetséges. Nem viheti át az $\overrightarrow{AA'}$ az A -t a B_i pontok egyikébe sem, mert különben az A -tól 1-re levő pontok száma S_{m+1} -ben is csak m maradna – egy megjegyzéssel hamarosan visszatérünk még ide –, és nem lehet A' egységnyire a további $B_i, C, \dots, G$ pontok valamelyikétől, különben az eltolás után attól a ponttól legalább $(m + 2)$ pontja lenne S_{m+1} -nek 1 távolságban. Az utóbbi meglátás a $B - i, \dots, G$ pontok körüli körök révén legfőljebb $2(r - 1)$ pontot zár ki k_a -ból, hiszen két körnek legfőljebb 2 közös pontja van. Más körülmény nem teheti alkalmatlanná A' -t. – A beígért megjegyzés; az $\overrightarrow{AB}$ eltolás mégis fölemelhetné $(m + 1)$ -re S_{m+1} -ben az A -tól 1-re levő pontok számát, ha ti. egy C pontot éppen rátolna k_a -ra. Ez azonban kiesik a második kizárásban, mint k_a és k_c közös pontja.

Mivel az $\overrightarrow{AA'}$ eltolást megadhatja $\overrightarrow{B_i B'_i}, \dots, \overrightarrow{GG'}$ is, és eközben kaphatunk újabb kizárando irányokat is, azért mindent egybevéve legfőljebb $r[m + 2(r - 1)]$ egységvektor nem alkalmas S'_m és vele S_{m+1} mondott kifejesztésére. Ebben az a lényeges, hogy ez a szám véges. Eszerint S_{m+1} végtelen sok módon képezhető S_m -ből, állításunkat – és vele a feladat állítását is – bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Annak belátásához, hogy minden m -hez létezik S_m , elég lett volna képezni egyetlen egységszakasz eltoltját, valamint eltoltjainak eltoltját és így tovább, a mondott korlátozásokkal. Így S_m elemeinek száma 2^m lenne. Indulásul avégett mutattunk egynél több példát, hogy az olvasó elképzeléseit elindítsuk. Ezzel a céllal mutattuk be S_2 -re az egyenlő oldalú háromszöget is, és evégett mutatunk a 3. ábrán olyan S_3 -at is, amely egyáltalán nem tartalmaz a fentiekben nem kizárt rombuszt, sőt éppen kizárt rombuszokból épül föl.



3. ábra

2. Nem volt lényeges fölírni a kizárandó eltolásvektorok számának megadott felső korlátját, csak az, hogy az összes kizárási típusokat megadjuk. A valóban kizárt vektorok száma az eltolásos eljárásban úgysis kisebb a korlátnál, ha S_m tartalmaz rombuszokat, illetve ha S_m pontjai közt előfordul 2 egységnyi vagy nagyobb távolság; mindkét körülmény föl is lép az egymás utáni S_m -ek eltolásos kifejtése során.

3. Fölvethető S_m létezésének kérdése a térben is, igen egyszerű példát nyújt S_3 -ra a szabályos tetraéder, a kocka és a szabályos dodekaéder csúcsainak halmaza, S_4 -re a szabályos oktaéder, S_5 -re a szabályos ikozaéder csúcsainak halmaza. Tulajdonképpen itt is használható a kifejtésben az eltolásos eljárás, meggondolandó azonban, hogy két egységgömb metszheti egymást körben is, ekkor közös pontjaik száma nem véges.