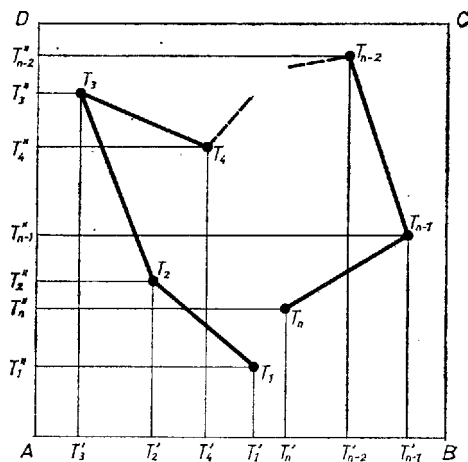


Jelöljük a négyzetet $ABCD$ -vel, a töröttvonal egymás utáni szögpontjait $T_1, T_2, \dots, T_n$ -nel. A feltevés szerint

$$T_1T_2 + T_2T_3 + \dots + T_{n-1}T_n > 1000.$$



Vetítsük a szögpontokat az AB és az AD oldalakra, legyen T_i vetülete T_i' illetve T_i'' , ekkor

$$T_iT_{i+1} \leq T_i'T_{i+1}' + T_i''T_{i+1}'' \quad (z = 1, 2, \dots, n-1),$$

így a $T_1'T_2' \dots T_n'$, $T_1''T_2'' \dots T_n''$ utakra

$$T_1'T_2' \dots T_n' + T_1''T_2'' \dots T_n'' > 1000,$$

ezért legalább az egyik út nagyobb mint 500, vehetjük, hogy az első út ilyen. A vetületek természetesen nem mindenütt az indexek növekvő vagy csökkenő rendjében követik egymást. Jelölje közülük az A -hoz legközelebbit M_1 a következő tőle különbözőt $M_2, \dots$, az utolsót M_r , ahol $r \leq n$ és $M_1M_r < AB = 1$. Azt mondjuk, hogy az M_jM_{j+1} szakasz ($j = 1, 2, \dots, r-1$) valamely X belső pontja α_j -szeresen van fedve, ha X -et töröttvonalunk α_j számú szakaszának vetülete tartalmazza (pl. A és B 0-szorosan vannak fedve). Ekkor

$$\begin{aligned} T_1'T_2' \dots T_n' &= \alpha_1 \cdot M_1M_2 + \alpha_2 \cdot M_2M_3 + \\ &+ \dots + \alpha_{r-1} \cdot M_{r-1}M_r. \end{aligned}$$

Ha mármost minden α_j kisebb volna 500-nál vagy legföljebb egyenlő volna vele, akkor a jobb oldal kisebb lenne 500-nál, holott a megválasztás szerint nagyobb nála. Van tehát olyan j , amelyre $\alpha_j > 500$, és ekkor az M_jM_{j+1} szakasz bármely X belső pontján át AB -re merőlegesen állított egyenes legalább 501 pontban metszi a törött vonalat. Ezt kellett bizonyítani.

Szeredi János (Budapest, II. Rákóczi F. Gimn.)

Megjegyzések 1. A feladat feltevésének azt az elemét, hogy a töröttvonal nem metszi önmagát, abban használtuk ki, hogy az X -ben emelt merőleges ugyanannyi pontban metszi a töröttvonalat, ahányszorosan X fedve van. Ez ugyanis nem állna akkor, ha X a töröttvonal két szakasza közös (belső) pontjának a vetülete volna.

2. Igaz a feladat következő általánosítása is: egy egységnyi oldalhosszúságú négyzet belsejében meg van rajzolva szakaszoknak egy olyan rendszere, amely szakaszok összhossza $2n$ -nél nagyobb (n természetes szám), és amely szakaszok közül bármely kettőnek legföljebb végpontjuk közös, akkor rajzolható a négyzet valamelyik oldalával párhuzamosan olyan egyenes, amely a töröttvonalat legalább $(n+1)$ pontban metszi.

Kelen Miklós (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)