

A kérdéses szummát – általános tagjában a kéttagú kifejezés négyzetét kifejtve – három szumma összegévé alakíthatjuk. Az állandó közös tényezőket mindjárt kiemeljük:

$$\sum_{\nu=0}^n (n^2 - 4n\nu + 4\nu^2) \cdot \binom{n}{\nu} = n^2 \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} - 4n \sum_{\nu=0}^n \nu \cdot \binom{n}{\nu} + 4 \sum_{\nu=0}^n \nu^2 \binom{n}{\nu}.$$

Az első szumma értéke az ismert

$$(1) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

azonosság alapján ¹ $n^2 \cdot 2^n$. A másodikban a $\nu = 0$ -hoz tartozó tag 0, ha pedig $\nu \geq 1$, akkor a tagokat így alakítjuk:

$$(2) \quad \begin{aligned} \nu \cdot \binom{n}{\nu} &= \frac{\nu \cdot n!}{\nu!(n-\nu)!} = n \frac{(n-1)!}{(\nu-1)!(n-\nu)!} = n \binom{n-1}{\nu-1}, \\ -4n \sum_{\nu=0}^n \nu \binom{n}{\nu} &= -4n^2 \sum_{\nu=1}^n \binom{n-1}{\nu-1} = -4n^2 \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} = -4n^2 \cdot 2^{n-1} = -2n^2 \cdot 2^n. \end{aligned}$$

(Kiemeltük a közös, állandó tényezőt, új $\mu = \nu - 1$ szummációs betűt vezettünk be, végül ismét alkalmaztuk (1)-et.)

Végül, a harmadik szummában hasonlóan $\nu = 0$ ismét 0-t ad, így (2), valamint $\nu = (\nu - 1) + 1$, és ismét (2), végül (1) alapján

$$\begin{aligned} \nu^2 \cdot \binom{n}{\nu} &= n\nu \cdot \binom{n-1}{\nu-1} = n(\nu-1) \binom{n-1}{\nu-1} + n \binom{n-1}{\nu-1}, \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{\nu-2} + n \binom{n-1}{\nu-1}, \text{ tehát} \\ 4 \sum_{\nu=0}^n \nu^2 \cdot \binom{n}{\nu} &= 4n(n-1) \sum_{\mu=0}^{n-2} \binom{n-2}{\mu} + 4n \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} = \\ &= 4n^2 \cdot 2^{n-2} - 4n \cdot 2^{n-2} + 4n \cdot 2^{n-1} = n^2 \cdot 2^n + n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Mindezeket egybevetve a három szumma összege valóban egyenlő az állítás jobb oldalával. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Turi Erzsébet (Győr, Révai M. Gimn.)

Megjegyzés. Ha a binomiális tételt az $(1+x)^n$ hatványra alkalmazzuk, a

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} x^\nu = (1+x)^n$$

összefüggést kapjuk. A megoldásunkban használt (1) azonosság ebből az $x = 1$ helyettesítéssel nyerhető. Ha előbb k -szor deriválunk x szerint, és osztunk $k!$ -sal, akkor a helyettesítéssel a

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \binom{\nu}{k} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

összefüggésre jutunk.

Így $k = 1$ és $k = 2$ mellett

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \nu = n \cdot 2^{n-1} \quad \text{és} \quad \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \nu(\nu-1) = n(n-1) \cdot 2^{n-2},$$

amikből a feladat állítása már könnyen bizonyítható.

¹ Czapáry E. – Gyapjas F. – Horvay K.–Pálmay L.: Matematika a gimn. és szakközépisk. IV. oszt. számára. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. 243. old. 61. feladat.