

Jelöljük az adott sorozat $2^n - 3$ elemét a_n -nel és egy, a követelménynek megfelelő részsorozat k -adik elemét b_k -val. (Megjegyezzük, hogy a kívánt részsorozat elemeinek összeállítása többféleképpen lehetséges.) Azt fogjuk megmutatni, hogy ha már találtunk a részsorozat céljára k számú megfelelő elemet, és ezek $b_1, b_2, \dots, b_k$, akkor találhatunk hozzájuk olyan b_{k+1} -et, amely amazok mindegyikéhez relatív prím (és nagyobb náluk). Egyszerűbben így mondhatjuk a talált követelményt:

$$b_{k+1} \quad \text{és a} \quad b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k$$

szorzat relatív príme.

b_1 és b_2 szerepére megfelel mindjárt $b_1 = a_3 = 5$, $b_2 = a_4 = 13$. Így a $b_1 b_2 = s_2$ szorzathoz relatív prím, nála nagyobb a_n -et keresünk b_3 szerepére. Azt a kizáró követelményt, hogy $(2^n - 3)$ -nak ne legyen közös osztója s_2 -vel, azzal fogjuk biztosítani, hogy a $(2^n - 3)$ közelében levő $c_n = a_n + 2 = 2^n - 1$ szám legyen többszöröse s_2 -nek. Ha ugyanis ez teljesül, akkor a_n és s_2 bármely közös osztója egyszerismind a_n -nek és c_n -nek is közös osztója, tehát osztója ezek különbségének, a 2-nek is. Így, ha ez a közös osztó nagyobb volna 1-nél, akkor csak 2-vel lehetne egyenlő. Ámde a_n és c_n páratlan volta miatt ez lehetetlen, tehát a_n és s_2 valóban relatív príme. – Ilyen feltétellel sikerül a_n -et találnunk.

Tekintsük az a_n sorozat első $(s_2 + 1)$ számú eleméhez, vagyis az $a_2, a_3, \dots, a_{3+s_2}$ számokhoz azokat a (legkisebb nemnegatív) r maradékokat, amelyek az s_2 -vel való osztásuknál rendre föllépnek. Így $0 \leq r \leq s_2 - 1$, a lehetséges különböző maradékok száma s_2 . A tekintetbe vett elemek száma pedig 1-gyel több, van tehát legalább kettő az elemek közt, amelyekre a maradék egyenlő. Jelöljük ezeket (vagy ha több van, két ilyen) a_t -vel és a_u -val ($u > t$), eszerint

$$a_u - a_t = 2^u - 2^t = 2^t(2^{u-t} - 1),$$

osztható s_2 -vel; és mivel s_2 páratlan, azért a zárójelbeli tényezőnek osztója: $2^{u-1} - 1 = ds_2$, ahol d természetes szám. Így pedig az előrebecsítettak szerint $ds_2 - 2 = 2^{u-t} - 3 = a_{u-t}$ -nek nincs közös osztója s_2 -vel, tehát lehet $b_3 = a_{u-t}$.

Eljárásunk alkalmas $b_1, b_2, \dots, b_k$ -hoz megfelelő b_{k+1} keresésére is, s_2 helyére a $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k = s_k$ szorzatot véve, hiszen az s_2 -re mondottak érvényesek s_k -ra is és nem használtuk ki, hogy s_2 -ben éppen 2 elemét szoroztuk össze a részsorozatnak. – Ezzel feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Vehettük volna b_3 szerepére a következőket is:

$$2ds_2 - 1 = 2^{u-t+1} - 3 = a_{u-t+1},$$

$$4ds_2 + 1 = 2^{u-t+2} - 3 = a_{u-t+2},$$

hiszen két szomszédos természetes szám mindig relatív prím egymáshoz, és ha $2cs_2$ nek, ill. $4cs_2$ -nek nincs közös osztója b_3 -mal, akkor s_2 -nek sincs.

2. Szemléletesen szólva: annak, hogy az a_n sorozatra igaz a feladat állítása, hogy tehát az a_n sorozatban „sok” relatív prím szám van, az az oka, hogy $c_n = a_n + 2$ sorozatban „sok” nem relatív prím számpár van. Az utóbbi állítás pontos alakja a következő: tetszőleges páratlan s számhoz van olyan n index, hogy c_n osztható s -sel.