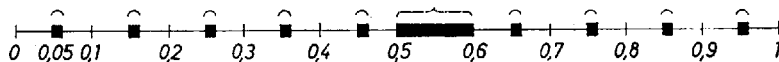


I. megoldás. A véletlenszerű kiválasztás a következőképpen értendő: annak valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a $[0; 1]$ intervallum valamely $[a, b]$ vagy $[a, b)$ vagy $(a, b]$ vagy (a, b) részintervallumába esik, egyenlő az intervallum $|b - a|$ hosszával.

Ha a kiválasztott szám tizedes tört alakjában az első n jegy között előfordul 5-ös jegy, akkor a kiválasztott számot „jó szám”-nak fogjuk nevezni. Próbáljunk képet alkotni a jó számok elhelyezkedéséről. Ha $a_1, a_2, \dots, a_k$ az 5-östől különböző számjegyek és $k \leq n - 1$, akkor a jobbról nyitott $[0, a_1 a_2 \dots a_k 5; 0, a_1 a_2 \dots a_k 6)$ intervallum minden száma jó szám.

Fordítva, minden jó szám beletartozik egy, az előbbi típusú intervallumba, mert véve az első 5-ös jegyét – legyen ennek a sorszáma m , és legyenek ezt megelőző tizedes jegyei $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ –, mindenesetre fennáll $m \leq n$ és $a_i \neq 5$, ha $i \leq m - 1$, tehát a jó szám benne van a következő intervallumban:

$$(1) \quad [0, a_1 a_2 \dots a_{m-1} 5; \quad 0, a_1 a_2 \dots a_{m-1} 6).$$



Ábránk $n \leq 2$ -re szemlélteti a jó számokat tartalmazó intervallumokat.

Az (1) alakú intervallumok diszjunktok (párként nincs közös pontjuk), ezért a keresett P valószínűséget az ilyen intervallumok hosszának összege adja meg. Az (1) hossza 10^{-m} , az ilyenek száma annyi, ahányféleképp az $a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ szám megválasztható, vagyis 9^{m-1} , és együttes $9^{m-1} \cdot 10^{-m}$ hosszukat összegeznünk kell $m = 1, 2, \dots, n$ -re.

$$P = \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + \dots + \frac{9^{n-1}}{10^n} = \frac{1}{10} \left\{ 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \right\} = 1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n.$$

(1)-ből látható, hogy a tizedes törttel kétféleképpen előállítható számoknak a véges alakjára gondoltunk. Az első bekezdésben adott értelmezés szerint azonban nem változtat eredményünkön, ha a végtelen alakra gondolunk.

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás a tankönyv egy „olvasmány” jelzésű fejezetét használta fel.¹

2. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $P \rightarrow 1$, eszerint annak valószínűsége, hogy a $[0; 1]$ -ből véletlenszerűen kiválasztott szám tizedes tört alakjában szerepel 5-ös számjegy: 1 (biztos esemény). Ezt azonban már értelmezésünk tartalmazta.

II. megoldás. A kérdéses eseménnyel ellentétes esemény valószínűségét határozzuk meg.

Osszuk a $[0; 1]$ intervallumot 10^n számú, egymással egyenlő, 10^{-n} hosszú részintervallumra, így az osztópontok azok a véges tizedes törtek, amelyeknek legfőljebb n tizedes jegyük van, más szóval az $1, 2, \dots, 10^n - 1$ egész számok 10^{-n} -szeresei. Így minden egyes részintervallum minden száma akkor és csak akkor „nem jó” szám, ha az intervallum bal végpontja nem jó szám.

A bal végpontok közül azok a nem jó számok, amelyeknek 10^n -szeresében nem fordul elő az 5-ös, azaz minden jegyük a 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 közül való. Számuk 9^n , így a nem jó intervallumok együttes hossza $\left(\frac{9}{10} \right)^n$. Ebből értelmezhető az I. megoldás egyszerű eredménye.

¹ Czapáry E.–Gyapjas F.–Horvay Katalin–Pálmay L.: Matematika a gimn. IV. o. számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969. 269. oldal: Valószínűségek meghatározása geometriai módszerekkel.