

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx - \operatorname{tg} (n-1)x \right) > \frac{1}{n} \operatorname{tg} nx.$$

1. Az $n = 3$ esetben azt kell bizonyítanunk, hogy ha $0 < x < \pi/6$, akkor

$$(2) \quad \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) > \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x.$$

A $\operatorname{tg} x = y$ jelöléssel egyrészt

$$(3) \quad 0 < y < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

másrészt

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2y}{1-y^2}, \quad \operatorname{tg} 3x = \frac{3y-y^3}{1-3y^2}.$$

Ezeket (2)-be beírva, a bizonyítandó állítás ekvivalens átalakításokkal a következőbe megy át:

$$3y + \frac{3y-y^3}{1-3y^2} > \frac{6y}{1-y^2}.$$

Itt a nevezők (3) szerint pozitívok, így újabb ekvivalens átalakításokkal

$$3y(1-3y^2)(1-y^2) + y(3-y^2)(1-y^2) - 6y(1-3y^2) = 2y(1+5y^2) > 0.$$

Az utolsó alak helyessége nyilvánvaló, ezzel (2)-t bebizonyítottuk.

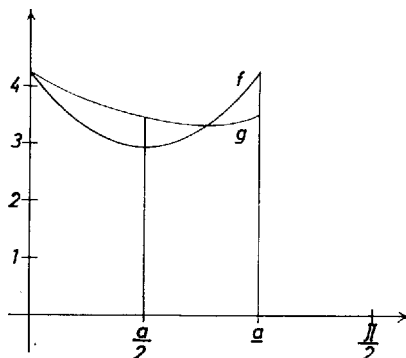
Ha nx -et a -val jelöljük, és (1)-et a pozitív $\frac{x}{2}$ -lel osztjuk, a

$$(4) \quad \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}{x} + \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}(a-x)}{x} > 2 \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 0}{a}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mi ezt fogjuk bizonyítani, és közben az a és x számokról csak azt használjuk fel, hogy

$$(5) \quad 0 < x < \frac{a}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

Rögzített a mellett a (4) bal oldalán álló kifejezés x függvénye, jelöljük ezt a függvényt $f(x)$ -szel. Ez a függvény az $x = \frac{a}{2}$ helyen egyenlő (4) jobb oldalával (1. ábra), így elég lesz belátni, hogy $f(x)$ monoton fogy a $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ szakaszon.



1. ábra

Mivel a $\operatorname{tg} x$ függvény deriváltja $1/\cos^2 x$, a Newton-Leibniz formula szerint

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0 &= \int_0^x \frac{dt}{\cos^2 t}, \\ \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}(a-x) &= \int_{a-x}^a \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^x \frac{dt}{\cos^2(a-t)}. \end{aligned}$$

Emiatt

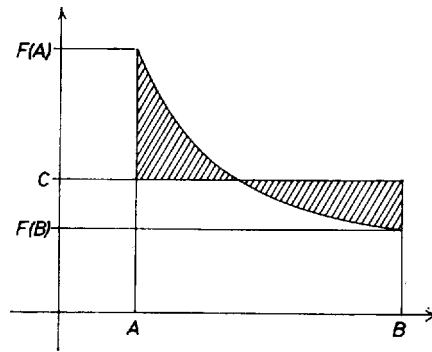
$$(6) \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \left[\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2(a-t)} \right] dt,$$

azaz $f(x)$ a

$$(7) \quad g(t) = \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2(a-t)}$$

függvénynek ún. integrálközepe:

$$(8) \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt.$$



2. ábra

Általában egy függvény integrálközepe egy szakaszon az a konstans, amivel a függvényt helyettesítve az integrálja nem változik meg: az $F(x)$ függvénynek az (A, B) szakaszon az integrálközepe C , ha (2. ábra)

$$\int_A^B F(x) dx = \int_A^B C dx, \quad \text{azaz} \quad C = \frac{1}{B-A} \int_A^B F(x) dx.$$

Ha $F(x)$ szigorúan monoton fogy az A, B szakaszon, akkor

$$(9) \quad F(A) > \frac{1}{B-A} \int_A^B F(x) dx > F(B),$$

hiszen $F(x)$ -et az egész (A, B) szakaszon $F(A)$ -val helyettesítve az integrál nő, $F(B)$ -vel helyettesítve pedig fogy:

$$\int_A^B F(A) dx < \int_A^B F(x) dx < \int_A^B F(B) dx.$$

Ennek alapján azt várjuk, hogy ha a $g(x)$ függvény monoton fogy a $0 \leq x \leq b$ szakaszon, akkor a $(0, x)$ szakaszon vett integrálközepe az x monoton fogyó függvénye. Valóban, ha

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt,$$

és $0 < x < y \leq b$, akkor $f(x) < g(x)$, és

$$\int_0^y g(t) dt = \int_0^x g(t) dt + \int_x^y g(t) dt = \int_0^x f(x) dt + \int_x^y g(t) dt < \int_0^x f(x) dt + \int_x^y f(x) dt = \int_0^y f(x) dt,$$

tehát az $f(x)$ konstansokkal a $(0, y)$ szakaszon vett integrálja nagyobb g integráljánál, és így g integrálközepe kisebb $f(x)$ -nél:

$$\frac{1}{y} \int_0^y g(t) dt < \frac{1}{y} \int_0^y f(x) dt = f(x).$$

Ha tehát belátjuk, hogy a (7) alatti $g(t)$ függvény monoton fogy a $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$ szakaszon, akkor ebből következik, hogy ott a (8)-cal definiált $f(x)$ függvény is monoton fogy, és azt már beláttuk, hogy ebből következik (4). A $g(t)$ függvény deriváltja,

$$g'(t) = \frac{2 \operatorname{tg} t}{\cos^2 t} - \frac{2 \operatorname{tg}(a-t)}{\cos^2(a-t)}$$

$0 < t < \frac{a}{2}$ mellett negatív, mert $0 < t < a-t < \frac{\pi}{2}$ miatt

$$0 < \operatorname{tg} t < \operatorname{tg}(a-t) \quad \text{és} \quad 0 < \cos(a-t) < \cos t,$$

tehát

$$\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t} < \frac{\operatorname{tg}(a-t)}{\cos^2(a-t)},$$

állításunkat ezzel bebizonyítottuk.