Megmutatjuk, hogy a kérdéses hányadosnak mindig van – legalábbis tágabb értelemben – határértéke, éspedig

$$(1) \qquad \frac{A_n}{B_n} = \begin{cases} +\infty, \text{ha} \quad a > b, & (\alpha) \\ \ \ 1, \quad \text{ha} \quad a = b, & (\beta) \\ \ \ 0, \quad \text{ha} \quad a < b. & (\gamma) \end{cases}$$

Az állítás (α) része például azt jelenti, hogy ha $a > b$, akkor bármely M számhoz van olyan N szám, hogy minden N-nél nagyobb n indexre az A_n/B_n hányados értéke M-nél nagyobb. Először ezt bizonyítjuk be, a bizonyításhoz szükségünk van a következő egyenlőtlenségre: ha b és m tetszőleges természetes számok, akkor

$$(2) \qquad (b+1)^m \geqq b^m + mb^{m-1}.$$

Az $m = 1$ kitevő mellett (2) két oldala egyenlő. Tegyük fel, hogy már igazoltuk (2)-t minden m-nél kisebb kitevőre, akkor

$$(b+1)^m = (b+1)(b+1)^{m-1} \geqq (b+1)\left\{b^{m-1} + (m-1)b^{m-2}\right\} =$$
$$= b^m + mb^{m-1} + (m-1)b^{m-2} \geqq b^m + mb^{m-1}$$

miatt igaz (2) az m kitevő mellett is.

Az (2) egyenlőtlenség alapján (1α) bizonyítása a következő. Legyen M tetszőleges valós szám, és legyen k a $2Mb$ szorzatnál nagyobb természetes szám. Akkor $a > b$ és (2) miatt

$$a^k \geqq (b+1)^k \geqq b^k + kb^{k-1} > 2Mbb^{k-1} = 2Mb^k,$$

tehát $a^k/b^k > 2M$. Legyen $n > k$, akkor

$$\frac{A_n}{B_n} > \frac{A_n - A_k}{B_n} = \frac{A_n - A_k}{B_n - B_k} \cdot \frac{B_n - B_k}{B_n}.$$

Itt az első hányados értéke nagyobb a^k/b^k-nál, hiszen

$$b^k(A_n - A_k) = a^k b^k \sum_{j=k+1}^{n} x_j a^{j-k} > a^k b^k \sum_{j=k+1}^{n} x_j b^{j-k} = a^k(B_n - B_k).$$

Elég tehát N-et úgy megválasztani, hogy $N > k > 2Mb$ legyen, továbbá úgy, hogy ha $n > N$, akkor

$$(3) \qquad \frac{B_n - B_k}{B_n} > \frac{1}{2}$$

teljesüljön. (3)-at rendezve azt kapjuk, hogy a

$$B_n - B_k > B_k$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami biztosan teljesül, ha $n - k - 1 > B_k$, hiszen

$$B_n - B_k = \sum_{j=k+1}^{n} x_j b^j$$

miatt $(B_n - B_k)$ olyan $(n-k-1)$-tagú összeggel egyenlő, amelynek minden tagja legalább 1. Eszerint a $N = B_k + k + 1$ választás megfelel, ahol k a $2Mb$ szorzatnál nagyobb természetes szám. Ezzel az (1α) állítást beláttuk.

Az (1β) állítás nyilvánvaló, hiszen ha $a = b$, akkor $A_n/B_n = 1$, minden n-re. Az (1γ) állítás pedig a már bizonyított (1α)-ból következik, hiszen ha $a < b$, akkor (1α) szerint B_n/A_n tart ∞-be, tehát a reciproka, A_n/B_n tart 0-hoz, ha n tart ∞-be. Ezzel állításunk mindhárom részét bebizonyítottuk, a feladatot megoldottuk.

Reviczky János, Balogh Zoltán, Hermann Péter