

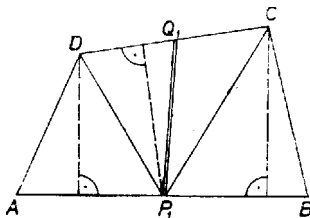
A föltevés azt jelenti, hogy minden olyan PQ pontpárra, amelyre

$$(1) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \lambda (> 0),$$

teljesül a következő is:

$$(2) \quad (APQD) = (BPQC) = \frac{1}{2} (ABCD),$$

egy konvex sokszög területét úgy jelölve, hogy zárójelben felsoroljuk csúcsait, valamelyik körüljárása sorrendjében. Megmutatjuk, hogy ebből a $\lambda = 1$ speciális érték mellett azt kapjuk, hogy CD párhuzamos AB -vel.



1. ábra

Valóban $\lambda = 1$ esetén P felezi AB -t és Q felezi CD -t (az 1. ábrán P_1 , ill. Q_1), tehát

$$(2') \quad (AP_1Q_1D) = (BP_1Q_1C).$$

Másrészt teljesül

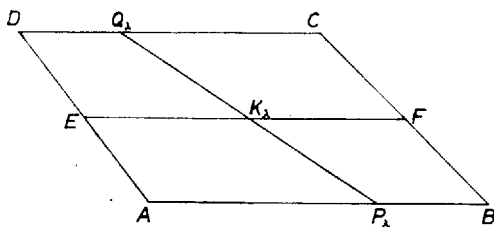
$$(3) \quad (P_1Q_1D) = (P_1Q_1C)$$

is, mert Q_1D és Q_1C alapjuk egyenlő és P_1 -ből húzott magasságuk azonos. (3)-at (2')-ből kivonva:

$$(AP_1D) = (BP_1C).$$

Ámde e két háromszög AP_1 , ill. BP_1 alapja egyenlő, így magasságuk, azaz D -nek és C -nek az AB egyenestől való távolsága is egyenlő. És mivel az $ABCD$ négyszög konvex, C és D ugyanazon az oldalán vannak AB -nek, tehát CD párhuzamos AB -vel, amint állítottuk. Más szóval: $ABCD$ trapéz.

Legyen most P_λ , Q_λ az (1)-nek egy tetszőleges $\lambda (\neq 1)$ pozitív értékkel eleget tevő pontpár (2. ábra).



2. ábra

$$\text{Így } P_\lambda B = \frac{1}{1+\lambda} AB, \quad P_\lambda A = \frac{\lambda}{1+\lambda} AB, \quad Q_\lambda D = \frac{1}{1+\lambda} CD, \quad Q_\lambda C = \frac{\lambda}{1+\lambda} CD.$$

$AP_\lambda Q_\lambda D$ és $BP_\lambda Q_\lambda C$ közös magasságú és (2) szerint egyenlő területű trapézok, tehát egyenlők az EK_λ , $K_\lambda F$ középvonalaik is, ahol E , F az AD , ill. BC szár felezőpontja és K_λ az EF , $P_\lambda Q_\lambda$ egyenesek metszéspontja. Így

$$EK_\lambda - K_\lambda F = \frac{1}{2(1+\lambda)} (\lambda AB + CD) - \frac{1}{2(1+\lambda)} (AB + \lambda CD) = \frac{\lambda - 1}{2(1+\lambda)} (AB - CD) = 0,$$

és ez tetszőleges $\lambda (\neq 1)$ arányérték mellett csak úgy teljesülhet, ha $AB = CD$, vagyis az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Ha viszont $AB = CD$, akkor minden λ arányérték mellett $EK_\lambda = K_\lambda F$, tehát $P_\lambda Q_\lambda$ minden λ mellett felezi a négyszög területét. Ezt kellett bizonyítanunk.

Kiss Emő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat feltételéből csak annyit használtunk fel, hogy a $P_\lambda Q_\lambda$ egyenes felezi a négyszög területét $\lambda = 1$, és valamilyen, 1-től különböző, de különben tetszőleges λ érték mellett.