

a) Az integrálszámítás egyik nevezetes egyenlőtlensége szerint ha az f_1, f_2 függvényeknek a négyzete is integrálható, akkor

$$(3) \quad \left(\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f_1^2(x)dx \int_a^b f_2^2(x)dx$$

(Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség). Ugyanis az f_1, f_2 alapján értelmezett

$$I(\lambda) = \int_a^b [f_1(x) + \lambda f_2(x)]^2 dx = \int_a^b f_1^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx + \lambda^2 \int_a^b f_2^2(x)dx$$

függvény értéke minden λ mellett nem negatív. Mivel $I(\lambda)$ λ másodfokú függvénye, ez csak úgy lehet, ha a diszkrimináns negatív vagy 0, ami épp a (3) egyenlőtlenséget jelenti. Alkalmazzuk (3)-at az $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = 1$ függvényekre, kapjuk, hogy

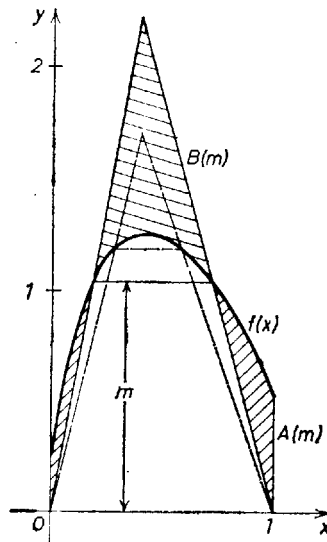
$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx = 1,$$

tehát (2) legkisebb lehetséges értéke 1, ami el is érhető (még az (1) megszorítás mellett is) az $f(x) = 1$ választással (és csak ezzel).

b) Feltevésünk szerint $f(x)$ alulról konkáv, azaz felülről konvex. Mivel $f(x) \geq 0$, ez az utóbbi azt jelenti, hogy a koordinátasíknak az x tengely és az $f(x)$ képe által közrefogott F része konvex halmaz. Tekintsük ennek a halmaznak a vízszintes húrjait, és rendeljük hozzá mindegyikhez azt a háromszöget, amelyiknek az alapja az x tengely 0 és 1 pontjai közötti szakasza, és a szárai átmennek a húr végpontjain. Jelöljük az m magassághoz tartozó húr esetében ezt a háromszöget $H(m)$ -mel, F -nek $H(m)$ által le nem fedett részének a területét $A(m)$ -mel és $H(m)$ -nek F által le nem fedett részét $B(m)$ -mel. Mivel F konvex, ha $m_1 < m_2$, $H(m_1)$ tartalmazza $H(m_2)$ -t, és $A(m_1) \leq A(m_2)$, $B(m_1) \geq B(m_2)$. Az m magasság legnagyobb szóbjajhető értéke egyenlő $f(x)$ maximumával, M -mel. $B(M)$ nyilván 0, és mivel $H(M)$ területe kisebb F területénél, $M \leq 2$. Az m -re szóbjajhető legkisebb érték az $f(0)$, $f(1)$ számok kisebbike, pontosabban mondva ez az érték már választható m -nek. Itt $A(m)$ határértéke 0, és mint az könnyen látható, az A, B függvények folytonosak. Tehát van olyan m , amelyre

$$A(m) = B(m),$$

és erre az m -re $H(m) = 1$, vagyis $H(m)$ harmadik csúcsa az $y = 2$ egyenesen van. Jelöljük a $H(m)$ két szárából összeálló függvényt f_0 -lal. Erre a függvényre



$$\begin{aligned} \int_0^1 f_0^2(x)dx - \int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^1 [f_0(x) - f(x)][f_0(x) + f(x)]dx \\ &\geq 2m \int_0^1 [f_0(x) - f(x)]dx \geq 0, \end{aligned}$$

mert

$$\int_0^1 [f_0(x) - f(x)][f_0(x) + f(x) - 2m]dx \geq 0,$$

hiszen itt az integrandus nem negatív: ahol $f_0 \leq f$, ott f_0 is, f is kisebb m -nél, tehát a szorzat mindkét tényezője pozitív. Mivel f_0 is alulról konkáv, és az integrálja 1, f_0 is beletartozik azoknak a függvényeknek a halmazába, amelyekre (2) legnagyobb értékét keressük. Könnyen látható, hogy f_0 négyzetintegrálja $4/3$, tehát a vizsgált függvényekre

$$1 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{4}{3}.$$