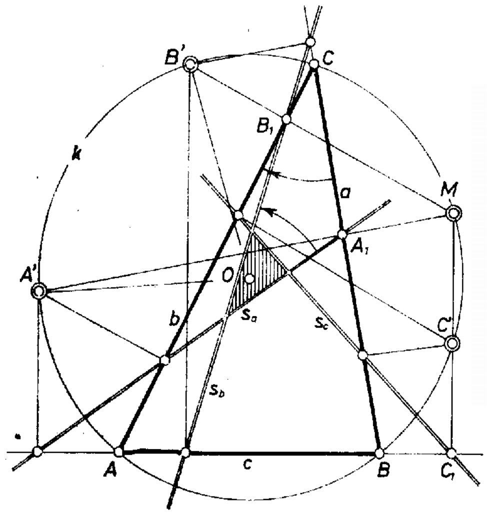
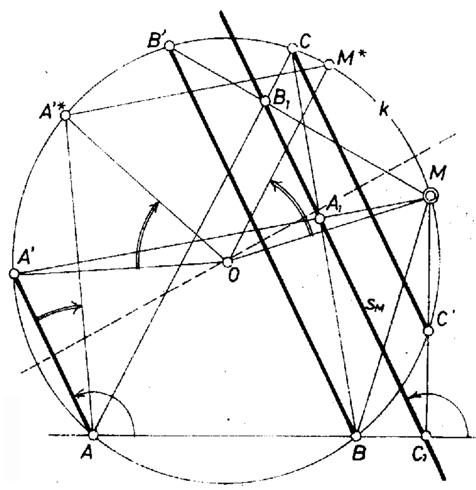
I. megoldás. Az állítást annak megmutatásával bizonyítjuk, hogy a két háromszög megfelelő oldalegyenespárjait egymással egyenlő nagyságú, ellentétes irányú elfordulások viszik át egymásba. Pontosabban: az A', B', C' ponthoz megszerkesztett Simson-egyenest rendre s_a-val, s_b-vel, s_c-vel jelölve, az AB, BC, CA egyenest pedig rendre c-vel, a-val, b-vel, az s_a-t s_b-be átvivő elfordulás, valamint az a-t b-be vivő elfordulás egyenlők, de ellentétes irányúak s i. t. (1. ábra).



1. ábra

Evégett megvizsgáljuk, hogyan változik M-nek k-n való elmozdulása hatására a hozzá tartozó s_M Simson-egyenes iránya. Megmutatjuk előkészítésül, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek mindegyike párhuzamos s_M-mel (2. ábra).



2. ábra

Valóban, a k-ban, valamint az MA, MB, MC átmérők fölötti Thalész-körökben keletkezett húrnégyszögek alapján

$$BAA'\sphericalangle = 180^\circ - BMA_1\sphericalangle = 180^\circ - BC_1A_1\sphericalangle,$$
$$ABB'\sphericalangle = AMB_1\sphericalangle = AC_1B_1\sphericalangle, \qquad ACC'\sphericalangle = AMC_1\sphericalangle = AB_1C_1\sphericalangle,$$

és ezek igazolják utóbbi állításunkat. (Az A, B, C és M pontok kölcsönös helyzete szerint e bizonyítás csekély – nem lényeges – módosulásokat mutathat; ha pedig pl. A' egybeesik A-val, akkor az AA' egyenes helyett k-nak A-beli érintője értendő.)

Forduljon el mármost az OM sugár OM^*-ba. Ekkor A'-nek új, A'^* helyzetét az M^*-on át MA'-vel párhuzamos egyenes metszi ki, így MM^* és $A'A'^*$ egyenlő és ellentétes irányú ívei a k-nak, és az M^*-hoz tartozó Simson-egyenes AA'^* iránya s_M-éhez képest

$$A'AA'^*\sphericalangle = \frac{1}{2}A'OA'^*\sphericalangle = -\frac{1}{2}MOM^*\sphericalangle$$

-gel van elfordulva, ahol a mínusz jel arra utal, hogy az elfordulás iránya ellen-tétes az OM-et OM^*-ba átvivő elfordulás irányával.

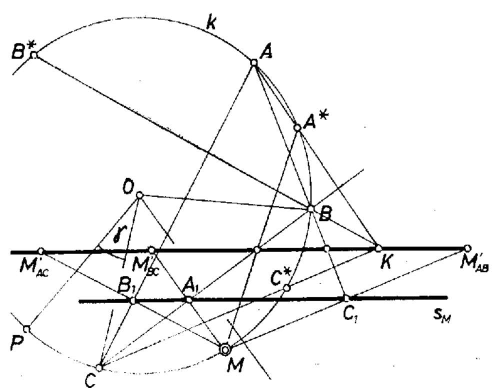
M szerepére A'-t, M^* szerepére B'-t helyettesítve, ennek alapján azt kapjuk, hogy s_b az s_a-hoz képest $(-1/2)\ A'OB'\sphericalangle$-gel van elfordulva (1. ábra). Ez pedig egyenlő a $(+1/2)$ AOB forgásszöggel, hiszen az előbbiek szerint az $A'B'C'$

háromszög úgy áll elő ABC-ből, hogy ezt tükrözzük k-nak s_M-re merőleges átmérőjére mint tengelyre. Végül az már nyilvánvaló, hogy $(1/2)\ AOB\sphericalangle = -BCA\sphericalangle$, és ez az a-t b-be vivő elfordulás negatívja.

A betűzés kellő megváltoztatásával meggondolásunk az $(s_b,\ s_c)\sphericalangle = -(b, c)\sphericalangle$ egyenlőséget adja; ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük végül: előfordulhat, hogy az A', B', C' pontokhoz tartozó Simson-egyenesek nem alkotnak háromszöget, mindhárom egy ponton megy át. Ilyen helyzet adódik, ha a kiindulási A, B, M, C pontok egy húrdeltoid csúcsai és AM a szimmetriatengely.

II. megoldás. 1. Ismeretes, hogy az ABC háromszög K magasságpontjának a BC, CA, AB egyenesekre vonatkozó A^*, B^*, C^* tükörképe rajta van az ABC köré írható k körön, tehát az A^*M, B^*M, C^*M egyeneseknek a BC, CA, AB egyenesekre vonatkozó tükörképe átmegy K-n (3. ábra). Ha belátjuk, hogy ezeknek a tükörképeknek az állása megegyezik, kapjuk, hogy M-nek a BC, CA, AB egyenesekre vonatkozó tükörképei: M'_{BC}, M'_{CA}, M'_{AB} egy egyenesen vannak. Mivel a tükörképeket az M centrumú, 1/2 arányú hasonlóság M-nek az ABC oldalaira eső vetületeibe viszi, ezzel egyrészt bebizonyítjuk a Simson-egyenes létezését, másrészt meghatározzuk ennek az egyenesnek az állását.



3. ábra

2. Válasszuk a k kör O középpontját origónak, és k valamelyik OP sugarát alapul véve jellemezzük k pontjait azzal a forgásszöggel, amekkora forgatás OP-t az illető ponthoz tartozó sugárba viszi; a sík egyeneseinek az állását pedig jellemezzük k valamelyik velük párhuzamos sugarának a forgsszögével. – Jelöljük az A, B, C, M pontokhoz tartozó forgásszögeket α-val, β-val, γ-val és μ-vel. A BOC szög felezőjének az állása jellemezhető az $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ forgásszöggel, a rá merőleges BC egyenes állása pedig az $\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\pi)$ forgásszöggel. Ha α^*-gal jelöljük az A^* ponthoz tartozó forgásszöget, az AA^* egyenes állása $\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*+\pi)$, és mivel ez merőleges BC-re, azért az α, β, γ, α^* forgásszögekre

$$\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*+\pi)-\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\pi)=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$$

teljesül, ahol k alkalmas egész szám. Az α^* forgásszög alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $k=0$, azaz

$$\alpha^*=\beta+\gamma-\alpha+\pi$$

legyen.

3. Mivel az A^*M egyenes állása $\frac{1}{2}(\alpha^*+\mu+\pi)$, ezt az egyenest a BC-re tükrözve, a képének az állása azzal az ω-val jellemezhető, amelyre ω és $\frac{1}{2}(\alpha^*+\mu+\pi)$ számtani közepe egyenlő $\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\pi)$-vel, azaz amelyre

$$\omega=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\mu}{2}.$$

Ez az α, β, γ változók szimmetrikus függvénye, tehát ez jellemzi a B^*M egyenes AC-re vonatkozó és a C^*M egyenes AB-re vonatkozó tükörképének az állását is (amint azt bizonyítani akartuk), és egyben ez határozza meg az M-hez tartozó s_M Simson-egyenes állását is.

4. Ha az α^*-ra fent kapott eredményben α helyére μ-t írunk, megkapjuk az A' pont α' forgásszögét:

$$\alpha'=\beta+\gamma-\mu+\pi.$$

Ha pedig az ω-ra kapott eredményben μ helyére ezt az α'-t írjuk, kapjuk az A'-höz tartozó Simson egyenes állását:

$$\omega_A=\frac{\alpha+\mu-\pi}{2}.$$

Ennek és a BC egyenes állását jellemző forgásszögnek a számtani közepe a

$$\varrho = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \mu}{4},$$

ha tehát BC-t egy ϱ állású egyenesre tükrözzük, az A'-höz tartozó Simson-egyenessel párhuzamos egyenest kapunk.

Mivel ϱ az α, β, γ változók szimmetrikus függvénye, ha a CA és AB egyeneseket a ϱ állású egyenesre tükrözzük, akkor a B'-höz, illetve C'-höz tartozó Simson-egyenessel párhuzamos egyenest kapunk. Ezt kellett bizonyítanunk.