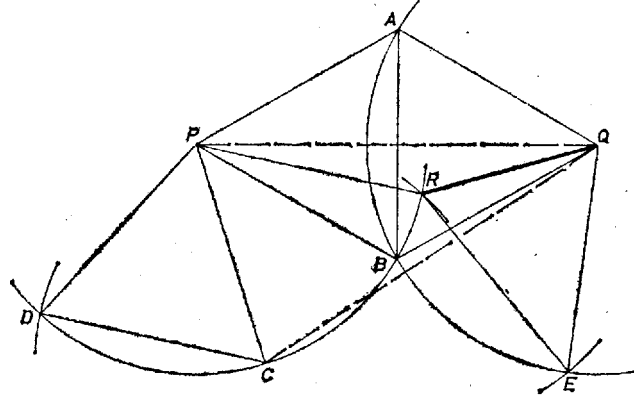


A tetszőleges P pont $f(P)$ képét röviden P' -vel jelöljük.

a) Megmutatjuk, hogy ha $PQ = \sqrt{3}$, akkor $P'Q' = \sqrt{3}$. Legyenek a P körüli, egységsugarú k körnek és a Q középpontú, egységsugarú körnek a metszéspontjai A és B (1. ábra), ekkor az AP , AQ , BP , BQ és AB szakaszok hossza egységnyi, e szakaszok képeinek a hossza is egységnyi.



Az ábrán a P és Q betűk feleltérőképeik.

1. ábra

Eszerint $A'B'P'$ és $A'B'Q'$ egységoldalú szabályos háromszögek, tehát Q' vagy azonos P' -vel vagy tőle $\sqrt{3}$ távolságra van. Eddig tehát azt láttuk be, hogy ha két tetszőleges pont távolsága $\sqrt{3}$, akkor képeik távolsága vagy 0 vagy $\sqrt{3}$.

Legyen C a P körüli, $\sqrt{3}$ sugarú kör, és a Q körüli, egységsugarú kör egyik metszéspontja. Így a $P'C'$ szakasz hossza vagy 0 vagy $\sqrt{3}$, másrészt $Q'C' = 1$. Ha Q' azonos volna P' -vel, akkor a $P'C'$ szakasz hosszának egyrészt 1-gyel, másrészt 0-val vagy $\sqrt{3}$ -mal kellene egyenlőnek lennie, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Így csak $P'Q' = \sqrt{3}$ lehet. Ezt akartuk bizonyítani.

b) Hasonlóan láthatjuk be, hogy ha egy leképezés megtartja az a távolságot (azaz ha $PQ = a$ -ból következik $P'Q' = a$), akkor az $\sqrt{3}$ távolságot is megtartja. A mi leképezésünk megtartja a $\sqrt{3}$ távolságot, tehát megtartja az $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ távolságot is, és általában a $(\sqrt{3})^k$ távolságokat minden természetes k kitevő mellett.

Megmutatjuk, hogy leképezésünk minden természetes n számra megtartja az n távolságot. Már tudjuk, hogy ez igaz, ha $n = 3^k$. Válasszuk a k kitevőt úgy, hogy $n < 3^k = m$ legyen, és tegyük fel, hogy $PQ = n$. Mérjük fel a PQ félegyenesre az egységnyi szakaszt m -szer, kapjuk a $P_1, P_2, \dots, P_m$ pontokat (köztük P_n azonos Q -val). A $P'P'_1, P'P'_2, \dots, P'P'_m$ szakaszok hossza egységnyi, és $P'P'_m = m$, ez csak úgy lehet, ha a $P', P'_1, \dots, P'_m$ egy egyenes egymást követő pontjai. Tehát a $P'_n = Q'$ pont P' -től n távolságra van, amint azt bizonyítani akartuk. Általában, ha egy leképezés megtartja az a távolságot, akkor megtartja az na távolságot is, ha n természetes szám.

Szükségünk van azonban annak megmutatására is, hogy leképezésünk az 1-nél kisebb távolságokat is megtartja. Ezt bizonyítjuk be a következő lépésben.

c) Térjünk vissza az 1. ábra pontjaihoz, és legyen R a PC egyenes Q -t tartalmazó oldalán az a pont, amelyre $CR = QR = 1$. Könnyen látható, hogy

$$\lambda = PR = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2} < 1.$$

Eddig beláttuk, hogy az A', B', C', P', Q' pontokból álló alakzat egybevágó az $ABCPQ$ alakzattal. Megmutatjuk, hogy R' azonos az $A'B'C'P'Q'$ alakzat R -nek megfelelő R^* pontjával. Mivel $Q'R' = C'R' = 1$, azért R' vagy R^* -gal, vagy R^* -nak a $Q'C'$ egyenesre vonatkozó D^* tükörképével azonos. Viszont

$$P'D^* = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{2} > 2,$$

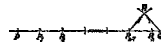
így elegendő megmutatni, hogy $P'R' \leq 2$. Legyen E olyan pont, melyre $PE = ER = 1$. Akkor $P'R' \leq P'E + E'R' = 2$, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

A leképezés ezek szerint a λ távolságot is megtartja, és általában megtartja az $n\lambda^k$ távolságot is, ahol n és k természetes számok.

d) Legyen $PQ = d$ tetszőleges valós szám. Feltehetjük, hogy $d > 0$, hiszen a leképezés egyértelmű volta miatt $P \equiv Q$ esetén $P' \equiv Q'$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan k , hogy $\lambda^k < \varepsilon$ válasszuk meg n -et úgy, hogy

$$n\lambda^k \leq d < (n+1)\lambda^k$$

legyen. Mérjük fel a PQ félegyenesre a λ^k szakaszt n -szer, kapjuk a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontokat, és legyen R olyan pont, melyre $P_{n-1}R = RQ = \lambda^k$ (2. ábra).



2. ábra

Akkor $P'R' \leq P'P_1 + P_1P_2 + \dots + P_{n-2}P_{n-1} + P_{n-1}R' + R'Q' = (n+1)\lambda^k < d + \varepsilon$.

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $P'R' < d + \varepsilon$, ami csak úgy lehet, ha $P'R' \leq d$. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges XY szakaszra $X'Y' \leq XY$. Alkalmazzuk ezt a P_nQ szakaszra, kapjuk, hogy

$$P'Q' \geq P'P_n - P_nQ' \geq PP_n - P_nQ \geq n\lambda^k - \varepsilon > d - 2\varepsilon.$$

Tehát $P'Q' \geq PQ$ is igaz, így $P'Q' = PQ$, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.