

1. A parabola belsején a parabola vonalával kettévágott síknak azt a részét értjük, amelyikben a fókusz van és ehhez hozzáértjük magának a vonalnak a pontjait is. Így a beírandó ellipszisonak lehet közös pontja az adott parabolákkal. Ha ezt kizárnánk, – akkor mint könnyen belátható – nem is lenne legnagyobb területű a beírt ellipszisek közt.

Koordinátákkal jellemezve a két parabola belsejének közös részét – amit gyümölcsmagra emlékeztető alakja alapján M -mel jelölünk – azok az (x, y) pontok alkotják, amelyekre $(p-t$ természetesen pozitívnak véve) teljesül

$$(3) \quad x^2 - p^2 \leq 2py \leq p^2 - x^2.$$

Ez az (x, y) -nal egyidejűen teljesül a $(-x, y)$, a $(-x, -y)$ és az $(x, -y)$ pontra is, tehát M -et önmagába viszi át az x és y tengelyre való tükrözés és az origóra mint centrumra való tükrözés is.

2. Megmutatjuk, hogy M konvex idom, vagyis bármely két belső vagy kerületi pontját összekötő szakasz is benne van M -ben. Legyenek $P_0(x_0, y_0)$ és $P_1(x_1, y_1)$ a (3)-at teljesítő egymástól különböző pontok, ekkor, amíg $0 \leq \lambda \leq 1$, addig az

$$x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1, \quad y_\lambda = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1$$

koordinátájú P_λ pont végigfut a P_0P_1 szakaszon és teljesíti (3)-at. Ugyanis egyrészt

$$\begin{aligned} 2py_\lambda &= (1 - \lambda) \cdot 2py_0 + \lambda \cdot 2py_1 \leq (1 - \lambda)(p^2 - x_0^2) + \lambda(p^2 - x_1^2) = \\ &= p^2 - \{(1 - \lambda)x_0^2 + \lambda x_1^2\} \leq p^2 - \{(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1\}^2 = p^2 - x_\lambda^2, \end{aligned}$$

hiszen

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x_0^2 &= (1 - \lambda)^2 x_0^2 + \lambda(1 - \lambda)x_0^2, \\ \lambda \cdot x_1^2 &= \lambda^2 x_1^2 + \lambda(1 - \lambda)x_1^2 \text{ és} \\ x_0^2 + x_1^2 &\leq 2x_0x_1. \end{aligned}$$

Másrészt lényegében ugyanígy bizonyítható, hogy

$$x_\lambda^2 - p^2 \leq 2py_\lambda.$$

Megmutatjuk még az M -ből az I. síknegyedbe eső M_1 résznek egy felhasználandó tulajdonságát is. Ennek pontjaira (3) jobb oldala szerint

$$x^2 + y^2 \leq p^2 - 2py + y^2 = (p - y)^2,$$

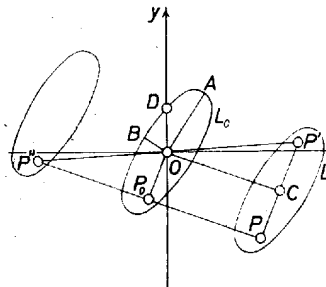
azaz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jelöléssel

$$(3a) \quad r + y \leq p$$

És ha a pontot az O origó körül ráfordítjuk az x tengely pozitív felére, r változatlan marad, y lecsökken 0-ra, tehát (3a) teljesül, a pont benne marad M_1 -ben.

3. Az eddigiek alapján belátjuk, hogy ha egy L ellipszis benne van M -ben, akkor benne van az a vele egybevágó L_1 ellipszis is, amelynek nagytengelye az x tengelyen van és kistengelye az y tengelyen. Erre támaszkodva elég lesz az L_1 -gyel megegyező tengelyállású ellipszisek közül az M -be beírt legnagyobb területűt meghatároznunk.

Első lépésül azt látjuk be, hogy L -vel együtt az az origó középpontú L_0 ellipszis is az M -ben van, amely L -ből a $\overrightarrow{CO}$ eltolással áll elő, ahol C az L középpontja. Legyen L egy tetszőleges pontja P (a belsejében vagy a kerületén), ennek C -re való tükröképe P' , és P' -nek O -ra való tükröképe P'' (1. ábra).



1. ábra

Mivel L centrálszimmetrikus, azért P' is az L -nek pontja és vele együtt M -nek is. Így pedig P'' is az M -nek pontja, hiszen M is centrálszimmetrikus. A két tükrözés összetételeként P'' előáll a P -ből translációval, melynek vektora

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{CP'} + 2\overrightarrow{P'O} = 2\overrightarrow{CO}.$$

Ezért M konvex volta miatt a PP'' szakasz P_0 felezőpontja is benne van M -ben, másrészt P_0 előáll a P -ből a $\overrightarrow{CO}$ -ral való eltolással is. Ezt P helyén az L minden pontjára alkalmazva azt kaptuk, hogy a mondott L_0 valóban benne van M -ben.

Föltehetjük, hogy L_0 nagytengelye az első és harmadik síknegyedben van vagy ezek határán, hiszen ha nem így van, akkor ez az x tengelyre vett tükrképére áll fenn, és az is M -ben van. Jelöljük L_0 nagytengelyének első negyedbeli végpontját A -val, kistengelye második negyedbeli végpontját B -vel, a rövidebbik AB ellipszisívnek az y tengelyen levő pontját D -vel és forgassuk L_0 -t a negatív forgásirányban addig, míg A az x tengelyre ér. Eközben az AOD szögtartománybeli rész M_1 ben marad, a DOB szögtartománybeli rész pedig belejut az OD sugarú körnek egy cikkébe, amely szintén M_1 -ben van, hiszen $OB \leq OD \leq OA$. Tehát az AOB negyedellipszis elforgatottja M_1 -ben lesz, L_0 elforgatottja pedig – a fent mondott L_1 – az M -ben, ezt akartuk bizonyítani.

4. Eszerint ellipszisünk egyenlete

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad |y| = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}, \quad a \geq b > 0$$

alakú, és benne az a, b féltengelyhosszakat úgy kell meghatároznunk, hogy egyrészt ne legyen M -en kívüli pontja, azaz (3) és (4) alapján

$$(5) \quad |x| \leq a \leq p \quad \text{és} \quad \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} \leq \frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p},$$

– speciálisan $x = 0$ esetén $b \leq p/2$ –, másrészt területe, ami közismerten $t = ab\pi$, maximális legyen, vagyis az ab szorzat legyen maximális.

Ekvivalens átalakításokkal (5)-ből

$$(6) \quad \left(\frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p}\right)^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 = \left(\frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p} - \frac{pb^2}{a^2}\right)^2 + b^2 \left(\frac{p^2}{a^2} - \frac{p^2 b^2}{a^4} - 1\right) \geq 0,$$

és az első háromtagú így írható:

$$(7) \quad \frac{p}{2} \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) - \frac{x^2}{2p}.$$

Egyelőre csak az olyan ellipsziseket tekintjük, amelyekben $2b^2 \leq a^2$, ezekben (7) eltűnik, ha

$$(8) \quad |x| = p\sqrt{1 - \frac{2b^2}{a^2}}, \quad (< p)$$

így (6) teljesüléséhez szükséges, de elegendő is, hogy a második háromtagúban

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{p^2 b^2}{a^4} - 1 \geq 0$$

legyen, azaz csak olyan b -k jönnek szóba, amelyekre (rögzített a mellett)

$$(9) \quad b \leq \frac{a}{p}\sqrt{p^2 - a^2}, \quad ab \leq \frac{a^2}{p}\sqrt{p^2 - a^2} \quad \left(\text{és } b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

Így az a -tól függő

$$\frac{t}{\pi} = \frac{a^2}{p}\sqrt{p^2 - a^2}$$

függvény maximumát kell keresnünk, ami nyilván ugyanott van, mint a következő függvényé:

$$\frac{p^2}{4\pi^2} \cdot t^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2}(p^2 - a^2).$$

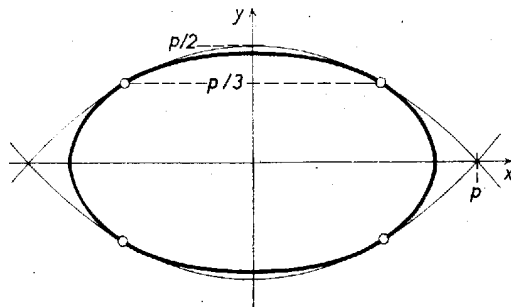
Itt a három tényező összege p^2 , állandó, tudjuk viszont, hogy állandó összegű pozitív számok szorzata akkor és csak akkor maximális, ha a tényezők egyenlők. Ebből, majd (9) alapján itt csak a következő ellipszisiről lehet szó:

$$(10) \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}}p (= 0,816p), \quad b = \frac{\sqrt{2}}{3}p \left(= \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,471p\right), \\ t = ab\pi = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}p^2 (= 1,209p^2).$$

5. Hátra van még a $2b^2 > a^2$, $a < \sqrt{2}b$, tengelyarányú ellipszisek esete. Ezekben $b \leq \frac{p}{2}$ alapján

$$a \leq \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad ab\pi \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}p^2 < \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}p^2,$$

azaz kisebb a főt elérte értéknél. Mindezek szerint a keresett ellipszis méreteit (10) adja, amely (8) szerint az $|x| = \frac{p}{\sqrt{3}}$ abszcisszájú pontokban érinti M határát (2. ábra).



2. ábra

Egyenlete $x^2 + 3y^2 = 2p^2/3$.

Megjegyzés. A 3. pont eredménye alapján vázolunk egy másik elindulást is. Nézzük meg, mit jelent az a , b tengelypár, hogy (4) benne van M -ben. (3) jobb oldali egyenlőtlensége céljára (4) pontjaira

$$(11) \quad x^2 + 2py = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + 2py = a^2 + \frac{p^2 b^2}{a^2} - \left(\frac{pb}{a} - \frac{ay}{b}\right)^2,$$

tehát (4) biztosan M belsejében van, ha

$$(12) \quad a^2 + \frac{p^2 b^2}{a^2} \leq p^2.$$

Ha van (4)-nek olyan pontja, amelynek ordinátájára

$$\frac{pb}{a} - \frac{ay}{b} = 0, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{b^2}{a^2}p,$$

akkor (12) szükséges feltétele is annak, hogy (4) az M -beli legyen. Ilyen y akkor van, ha

$$\frac{b^2}{a^2}p \leq b, \quad \text{azaz} \quad pb \leq a^2.$$

Ha viszont nincs ilyen y , azaz ha $pb > a^2$, akkor, mivel az ellipszis minden pontjára (11)-ben

$$\frac{pb}{a} - \frac{ay}{b} \geq \frac{pb}{a} - a > 0,$$

ezt helyettesítve (11)-be

$$x^2 + 2py \leq 2pb,$$

és ez nem nagyobb p^2 -nél, ha

$$(12) \quad b \leq p/2,$$

ami triviálisan szükséges feltétele annak, hogy (4) az M -ben legyen.

Ha tehát valamely b -re teljesül (12), akkor (4) eleve M -beli minden olyan a mellett, melyre $pb > a^2$, vagyis amelynek a tengelyei „nem túl nagyok”. A $\sqrt{pb}$ -nél nagyobb a értékekre pedig (12) a szükséges és elégséges feltétel. Ennek alkalmas továbbalakításából olvasható ki a fenti (10) eredmény.

Jutalomul 100–100 Ft-os könyvutalványt kapott pontversenyen kívül: Bara Tamás, Bartolits István, Császár Gyula, Kiss Emil, Kollár János, Kópházi József, Lelkes András, Oláh Vera és Pallagi Dezső.