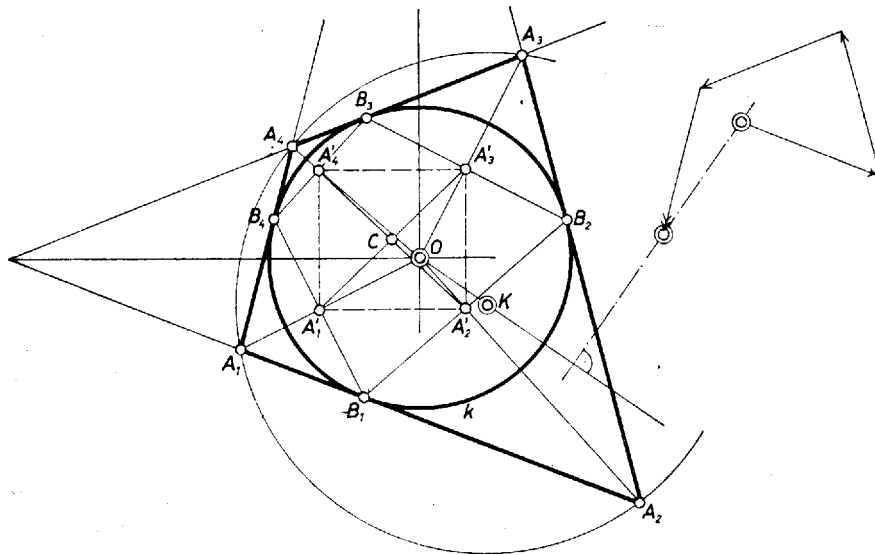


I. megoldás. Jelöljük a bicentrikus négyszög csúcsait A_1 -gyel, A_2 -vel, A_3 -mal, A_4 -gyel, a köréje és a beléje írt körök középpontját K -val, ill. O -val, a beírt kört k -val, k érintési pontjait az A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_1 oldalakon rendre B_1 -gyel, B_2 -vel, B_3 -mal, B_4 -gyel, és az $\vec{OB}_i$ vektorokat $\mathbf{b}_i$ -vel ($i = 1, 2, 3, 4$). Ha a $\mathbf{b}_i$ vektorokat $(+90^\circ)$ -kal elforgatjuk, a pozitívkörüljárású négyszög oldalaival párhuzamos, egyenlő hosszúságú vektorokat kapunk, elegendő tehát megmutatni, hogy a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4$ vektor párhuzamos az $\vec{OK}$ vektorral.



Invertáljuk a négyszög köré írt kört k -ra, így az A_i csúcsok k -ra vonatkozó A'_i inverzén átmenő kört kapunk. Ismeretes, hogy az inverzió alapkörén kívül lévő pont inverzét megkapjuk, ha belőle érintőket húzunk az alapkörhöz, és vesszük az érintési pontok közti szakasz felezőpontját. Eszerint az A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 pontok rendre a $B_4B_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4$ szakaszok felezőpontjai, az $A'_1A'_2A'_3A'_4$ négyszög a $B_1B_2B_3B_4$ négyszög középnégyszöge (azaz csúcsai $B_1B_2B_3B_4$ -nek oldalfelező pontjai). Tehát az $A'_1A'_2A'_3A'_4$ négyszög paralelogramma, másrészt csúcsai egy körön, k inverzén vannak.

Ez csak úgy lehet, ha ez a négyszög téglalap, és ekkor a köréje írható kör C középpontja a négyszög centruma, vagyis

$$\vec{OC} = \frac{1}{4}(\vec{OA'_1} + \vec{OA'_2} + \vec{OA'_3} + \vec{OA'_4}) = \frac{1}{4}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4).$$

Ha tehát a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4$ összeg $\mathbf{0}$ vektor, akkor C azonos O -val, és így K is azonos O -val. Ha pedig ez az összeg nem $\mathbf{0}$, akkor C és O különböző pontok és az $\vec{OC}$ vektor párhuzamos $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$ -gyel. Ismeretes, hogy egy kör és inverzének középpontja az inverzió centrumán átmenő egyenest határoz meg, tehát az O, C, K pontok egy egyenesen vannak, és OK is párhuzamos $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$ -gyel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Feladatunk állításán túlmenően azt is bebizonyítottuk, hogy a $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4)$ összeg akkor és csak akkor $\mathbf{0}$, ha O és K azonosak.

2. A megoldásból az is kiolvasható, hogy $A_1A_2A_3A_4$ akkor és csakis akkor bicentrikus négyszög, ha a $B_1B_2B_3B_4$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

II. megoldás. A vektorok skaláris szorzatát felhasználva megmutatjuk, hogy feladatunk állítása minden bicentrikus sokszögre érvényes. Legyenek a sokszög csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n$ (és állapodjunk meg abban, hogy A_{n+1} is az A_1 csúcsot jelöli), a sokszög köré és a beléje írt körök középpontja legyen K és O . Jelöljük az A_i, O pontokhoz a K centrumból húzott helyvektorokat rendre $\mathbf{a}_i$ -vel és $\mathbf{p}$ -vel, az A_iA_{i+1} oldalvektorral megegyező egyirányú egységvektort $\mathbf{e}_i$ -vel ($i = 1, 2, \dots, n$). Feladatunk állítása ekvivalens azzal, hogy a

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n)$$

skaláris szorzat értéke 0, ezt fogjuk bizonyítani.

Az A_i csúcsához tartozó belső szögfelező irányát a $(\mathbf{p} - \mathbf{a}_i)$ vektor, az A_i -beli külső szögfelező irányát az $(\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i)$ vektor adja meg ($i = 1, 2, \dots, n$; és $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_n$) emiatt

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}_i)(\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i) = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$2\mathbf{p} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i(\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_i).$$

A jobb oldalon álló összeg egyenlő a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})$$

összeggel (ahol $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_1$), ennek viszont minden tagja 0, hiszen $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})$ az $A_i A_{i+1}$ szakasz felezőpontja, és $K A_i = K A_{i+1}$ miatt ennek a felezőpontnak a helyvektora merőleges az $A_i A_{i+1}$ oldalra. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Kópházi József (Tatabánya, Árpád Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A most bizonyított állítás $n = 3$ melletti speciális esete ekvivalens a P.51. probléma állításával, a fenti bizonyítás az erre adott II. megoldás általánosítása (K. M. L. 41. kötet 70. old.).