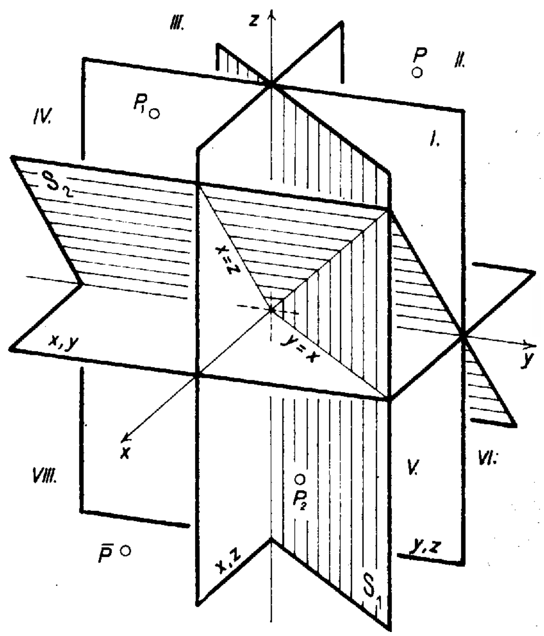
1. A test felvágásához használandó koordinátatengely-síkok éppen azok a határok, amelyeken átlépve egyik-egyik koordináta előjele megváltozik, és ez kihatással van az abszolút érték függvény képzési módjára. Így az x, y tengelyek által kifeszített, $z=0$ egyenletű tengelysík egyik oldalán (a z tengelyt szokásosan függőlegesen fölfelé irányítva a felső oldalán) $z>0$, a másik (az alsó) oldalán $z<0$. Az y, z, valamint a z, x tengelyek alkotta tengelysík hasonlóan az x, ill. y koordináta előjele szerint vágja két-két részre a teret, és e 3 sík együttvéve a következő 8 térnyolcadot alakítja ki (1. ábra):



1. ábra

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & \left.\begin{array}{l} x>0, \end{array}\right\} y>0, \\ \text{II.}\ \text{III.} & x<0, \\ \text{IV.} & \left.\begin{array}{l} x>0, \end{array}\right\} y<0, \end{array} \Bigg\} z>0; \qquad \begin{array}{rl} \text{V.} & \left.\begin{array}{l} x>0, \end{array}\right\} y>0, \\ \text{VI.}\ \text{VII.} & x<0, \\ \text{VIII.} & \left.\begin{array}{l} x>0, \end{array}\right\} y<0, \end{array} \Bigg\} z<0.$$

Jelöljük a vizsgálandó K testnek az egymás utáni térnyolcadokba eső részét rendre K_{I}-gyel, K_{II}-vel, …, K_{VIII}-cal.

2. Az O origóra való tükrözés a $P(x,\,y,\,z)$ koordinátákkal bíró pontot a $\overline{P}\ (-x,\,-y,\,-z)$ pontba viszi át (magát O-t pedig önmagába). Ebben a két pontban (1) bal oldalának az értéke egyenlő, így $\overline{P}$ akkor és csak akkor van benne a K-ban vagy van a K határán, ha P benne van K-ban vagy a határán. Eszerint az O-ra való tükrözés K-t mint egészet önmagába viszi át, a vizsgálandó részeit pedig páronként egymásba, tehát a

$$K_{\mathrm{I}} \text{ és } K_{\mathrm{VII}}, \qquad K_{\mathrm{II}} \text{ és } K_{\mathrm{VIII}}, \qquad K_{\mathrm{III}} \text{ és } K_{\mathrm{V}}, \qquad K_{\mathrm{IV}} \text{ és } K_{\mathrm{VI}}$$

párok mindegyikében a két rész egybevágó egymással.

Ahogyan a megszokott x, y síkban az $y=x$ egyenletű egyenesre – az I. és III. síknegyedek szögfelező egyenesére – való tükrözés az (x,y) és (y,x) pontokat egymásba viszi át, hasonlóan a z tengely és az x, y sík $y=x$ egyenletű egyenese által meghatározott S_1 síkra tükrözve a teret, a $P(x,y,z)$ és $P_1\ (y,x,z)$ pontok egymásba mennek át. (Ez a sík felezi az I., a III., az V. és a VII. sorszámú térnyolcadokat.) Mivel (1) bal oldalának értéke P_1-ben ugyanannyi, mint P-ben, azért az S_1-en való tükrözés is önmagába viszi át K-t, a K_{II}, K_{IV}, valamint K_{VI}, K_{VIII} rész-párokat pedig egymásba, tehát a mondott részek páronként egybevágók. (Ezt sejteti az is, hogy a mondott részeket tartalmazó térnyolcadokban x és y egymással ellentétes előjelűek, és pl. a II.-ban x olyan jelű, mint a IV.-ben az y s i. t. K-nak páratlan indexű részeit pedig önmagukba viszi át a most tekintett tükrözés.) Az eddigiek szerint K_{II}, K_{IV}, és K_{VI}, K_{VIII} egybevágók.

Végül egybevágók velük a föntebbi K_{III}, K_{V} pár tagjai is, vagyis K_{I}, és K_{VII} kivételével mind a 6 része K-nak. Ugyanis az x, z sík $x=z$ egyenletű egyenese és az y tengely által meghatározott S_2, síkra tükrözve a teret, valamint megvizsgálva (1) bal oldalán az x, z csere következményét, hasonlóan kapjuk, hogy K_{II} egybevágó K_{V}-vel és K_{III} a K_{VIII}-cal.

Ezzel a feladat első állítását bebizonyítottuk. (Ehhez az egyes részek alakjáról nem használtunk fel semmit.)

3. Mivel K_{II}-ben $x<0,\ y>0,\ z>0,$ ezért itt $|x|=-x,\ |y|=y,\ |z|=z$. Ezeket (1) bal oldalába helyettesítve, és alkalmazva a tetszőleges valós a, b számpárra érvényes

$$|a|+|b|\geq|a+b|$$

egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy K_{II}, pontjaira teljesül egyrészt

$$2 \geq -x + |y+z| + |x+y+z| \geq -x + y + z + x + y + z = 2(y+z),$$

másrészt $|a| = |-a|$ alapján a következő is:

$$2 \geq |-x| + y + z + |-x-y-z| \geq -x + y + z - x - y - z = -2x = 2|x|.$$

Tehát K_{II} pontjaira a II. egyenlőtlenségrendszeren kívül az

$$(2) \qquad |x| \leq 1, \qquad y + z \leq 1$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek.

Viszont II. és (2) maga után vonja (1)-et, hiszen (1) bal oldalának az értékére, ha $x + y + z \geq 0$, fennáll

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| = -x + y + z + x + y + z = 2(y+z) \leq 2,$$

ha pedig $x + y + z < 0$, akkor

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| = -x + y + z - x - y - z = -2x \leq 2.$$

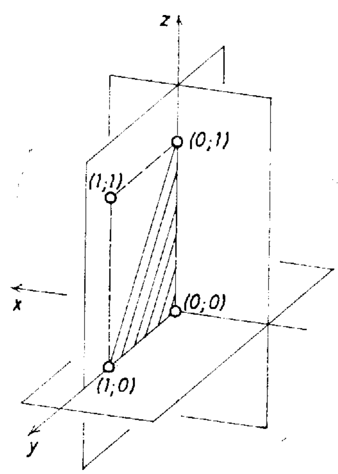
Ezek szerint K_{II} pontjainak y és z koordinátáira

$$y > 0, \;\; z > 0, \;\; y + z \leq 1$$

teljesül: ezek az y, z síknak a (0, 0), (1, 0), (0, 1) pontjai által meghatározott háromszögét jelölik ki. Ezt a háromszöget úgyis megkapjuk, ha a

$$(3) \qquad 0 < y \leq 1, \quad 0 < z \leq 1$$

négyzetet az $y + z = 1$ egyenessel kettévágjuk (2. ábra).

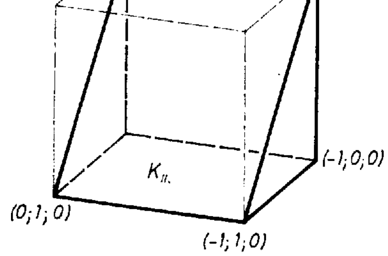


2. ábra

Másrészt K_{II} pontjainak első koordinátáira

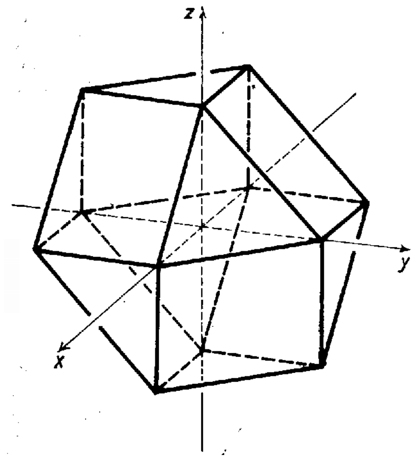
$$0 < -x \leq 1$$

teljesül: ez (3)-mal együtt egy kockát határoz meg a térben, K_{II}-t ebből a kockából úgy kaphatjuk meg, ha a kockát kettévágjuk az y, z sík $y + z = 1$ egyenesén átmenő és az x tengellyel párhuzamos síkkal (3. ábra).



3. ábra

Ezzel feladatunk második állítását is bebizonyítottuk. A K testről összképet mutat a 4. ábra.



4. ábra

Füredi Zoltán