

A feladatban szereplő sorozat tagjait akkor kapjuk, ha $\sqrt{2}$ -höz közel álló racionális számokat állítunk elő a következő megfontolás szerint. Kiindulunk a $q = 1 - \sqrt{2}$ számból, és azt mondjuk, hogy ennek n -edik hatványa

$$q^n = (1 - \sqrt{2})^n \sim 0.$$

A hatványt a binomiális tétel szerint kifejtve minden második tag tartalmazza a $\sqrt{2}$ -t:

$$q^n = (1 - \sqrt{2})^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-\sqrt{2})^j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} \cdot 2^k - \sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k+1} \cdot 2^k.$$

(Csak egyszerűség kedvéért írtunk ∞ -t az összegezés felső határának; ugyanis azok a tagok, amiket így önkényesen belevettünk az összegbe, 0-val egyenlők – hiszen $\binom{n}{j}$ értéke definíció szerint 0-val egyenlő, ha, $j > n$.) A $q^n \sim 0$ közelítő egyenlőségbe q^n fenti kifejezését írva, majd $\sqrt{2}$ értékét kifejezve, belőle a $\sqrt{2} \sim a_n$ közelítő egyenlőséget kapjuk.

Pontosabban az igaz a fentiek alapján, hogy

$$a_n - \sqrt{2} = \frac{q^n}{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k+1} \cdot 2^k}.$$

Itt a nevező értéke legalább 1, hiszen a nevezőben olyan összeg áll, amelynek a tagjai nem-negatívak, és első tagja $n \geq 1$. A számláló viszont tart 0-hoz, ha n tart a végtelenbe, hiszen $|q| < 1$. Ezek szerint $a_n - \sqrt{2}$ tart 0-hoz, ha n tart végtelenbe, vagyis az a_n sorozat határértéke $\sqrt{2}$.