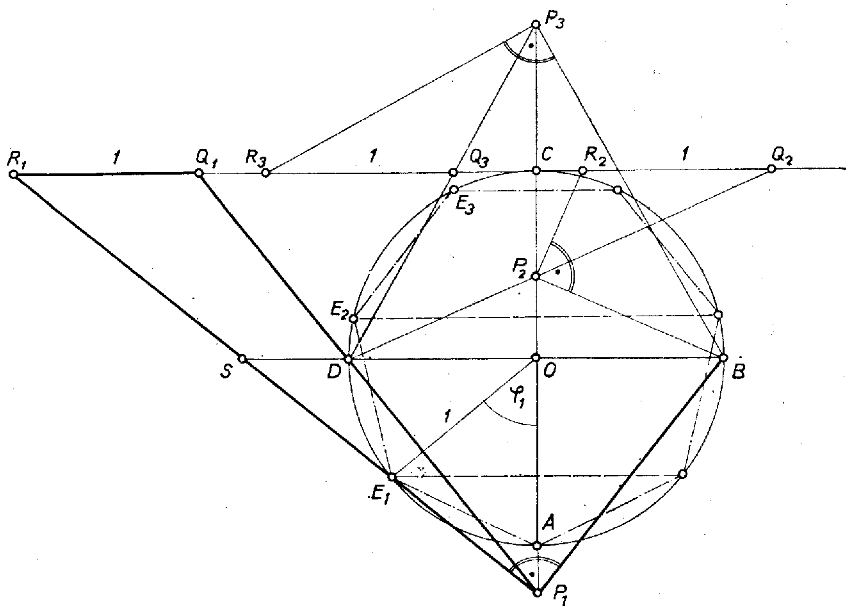
Legyen P egyelőre az OA félegyenes A-n túli részének tetszőleges pontja, k sugarát válasszuk egységnek, és OP hosszát jelöljük a-val, a BD és PR egyenesek metszéspontját pedig S-sel (az ábrán P, Q, R helyén P_1, Q_1, R_1 áll).



A BPS derékszögű háromszögből

$$OS = \frac{OP^2}{OB} = a^2,$$

tehát $DS = a^2 - 1$. A PDS, PQR hasonló háromszögekben a DS, QR oldalak aránya egyenlő a hozzájuk tartozó magasságok arányával, ebből

$$QR = \frac{DS \cdot CP}{OP} = \frac{(a^2-1)(a+1)}{a}.$$

Feladatunk szerint $QR = OA$, tehát az $a > 1$ valós számra teljesül az

(1) $$\frac{(a+1)(a^2-1)}{a} = 1$$

egyenlet. Eszerint $a < 2$, hiszen $a \geq 2$ mellett (1) bal oldalán $(a+1)/a > 1$ és $a^2 - 1 > 1$. Emiatt az OP szakasz felező merőlegese valóban metszi k-t, jelöljük az egyik metszéspontot E-vel, az AOE szöget φ-vel (az ábrán E_1, φ_1). Szerkesztésünk szerint $0 < \varphi < \pi/2$, és azt kell eldöntenünk, hogy ha a-ra teljesül (1), akkor teljesül-e $\varphi = 2\pi/7$. Be fogjuk látni, hogy teljesül.

Az OEP egyenlő szárú háromszögben $OP = 2OE\cos\varphi$, azaz $a = 2\cos\varphi$, és (1) a φ szögre a

(2) $$8\cos^3\varphi + 4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 1 = 0$$

egyenletet jelenti. Megmutatjuk, hogy ha $\cos\varphi \neq 1$, akkor (2) ekvivalens a

(3) $$\cos 4\varphi = \cos 3\varphi$$

egyenlettel (azaz ha φ-re teljesül (3), akkor φ-re vagy $\cos\varphi = 1$, vagy (2) teljesül). Valóban, (3) szerint

$$\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

ebbe $\sin^2\varphi$ helyére $(1-\cos^2\varphi)$-t helyettesítve, és szorzattá alakítva a

$$(\cos\varphi - 1)(8\cos^3\varphi + 4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk. Az ismert

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

összefüggés szerint (3) ekvivalens a

(4) $$\sin\frac{7\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 0$$

egyenlettel. Mivel $0 < \varphi < \pi/2$, azért $\sin\varphi/2 \neq 0$, tehát $\sin\dfrac{7\varphi}{2} = 0$, amely a $[0,\, 2\pi]$-ben csak π-re teljesül, tehát $\dfrac{7\varphi}{2} = \pi$. Ezt akartuk bizonyítani.

Már csak azt kell belátnunk, hogy van olyan $a > 1$, szám, amelyre (1) teljesül. Ha $\varphi = 2\pi/7$, akkor φ-re teljesül (4) és $\cos\varphi \neq 1$, tehát φ-re (2) is teljesül, így az $a = 2\cos\varphi$ számra teljesül (1), és ez a szám pozitív. Ehhez viszont (1)-ből következik, hogy $a > 1$, hiszen $0 < a < 1$ mellett (1) bal oldalának az értéke negatív.

Móri Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan lehet megmutatni, hogy az OC szakaszon van olyan P_2 pont és OC-nek C-n túli meghosszabbításán olyan P_3, hogy az e-ből P_iD által kimetszett pontot Q_i-vel ($i = 2,\ 3$), a P_iB-re merőleges egyenessel kimetszett pontot R_i-vel jelölve, ha teljesül $Q_iP_i = OA$, akkor az OP_i szakasz felező merőlegese k-ból a beleírható, A csúcsú szabályos hétszögnek újabb $2-2$ csúcsát metszi ki.

2. Komplex számok felhasználásával a kérdés valamivel kevesebb számítás útján dönthető el.

3. A bebizonyított állítás kapcsolatban van az (1)-ből adódó $a^3 + a^2 - 2a - 1 = = 0$ egyenletnek az ún. *Lill*-féle eljárás útján való grafikus, közelítő megoldásával.