

1. Szemléletesen szólva az $1, 2, \dots, n$ számoknak csak az olyan permutációit tekintjük, amelyekben minden egyes szám vagy megmarad az alapsorrendbeli helyén, vagy pedig valamelyik szomszédjának a helyét foglalja el. Így a $2, 3, \dots, n-1$ számok részére 3 hely jön szóba, az 1 és n számok részére pedig csak 2 hely.

Jelöljük az (1) tulajdonságú n -elemű permutációk számát p_n -nel. (1) szerint i_n értéke vagy n , vagy $(n-1)$. Az első esetben $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ az $1, 2, \dots, n-1$ számok permutációja, melyre ugyancsak teljesül (1), ezek száma tehát p_{n-1} . A második esetben n -nel csak i_{n-1} lehet egyenlő, tehát $(i_1, i_2, \dots, i_{n-2})$ az első $(n-2)$ természetes szám (1) tulajdonságú permutációja. Ezeknek a száma p_{n-2} , tehát

$$(2) \quad p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Természetesen (2)-nek csak $n > 2$ mellett van értelme, így a p_n számok meghatározásához szükségünk van az első két értékre, ami nyilván $p_1 = 1, p_2 = 2$. Ezek a kezdő értékek (2)-vel együtt már egyértelműen meghatározzák p_n értékét.

2. A továbbiakban explicit kifejezést keresünk p_n -re.

Általában az olyan sorozatokat, amelyekre teljesül (2), Fibonacci-féle sorozatoknak nevezzük. (2)-ből közvetlenül következik a Fibonacci-sorozatok következő három tulajdonsága:

- a) Ha az a_n sorozat Fibonacci-sorozat, akkor ilyen típusú a $c_n = \lambda a_n$, sorozat is, ahol λ tetszőleges valós szám.
- b) Ha az a_n, b_n sorozatok Fibonacci-sorozatok, akkor ilyen típusú a $c_n = a_n + b_n$, sorozat is.
- c) Az $a_n = q^n$ geometriai sorozat akkor és csakis akkor Fibonacci-sorozat ha q gyöke a

$$q^2 = q + 1$$

egyenletnek, azaz ha

$$\text{vagy} \quad q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{vagy} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Elegendő tehát olyan α, β számokat keresnünk, melyekre a $c_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ sorozat első két tagja rendre megegyezik a fenti p_n sorozat első két tagjával, akkor minden n -re teljesül $p_n = c_n$. Ilyen számpár a

$$q_1 \alpha + q_2 \beta = p_1 = 1 \quad q_1^2 \alpha + q_2^2 \beta = p_2 = 2$$

egyenletrendszerből:

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \quad \text{azaz} \quad \frac{q_1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \quad \text{azaz} \quad -\frac{q_2}{\sqrt{5}},$$

ennélfogva

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

Ezzel megkaptuk p_n kifejezését kizárólag az n indexszel kifejezve. (Könnyű belátni, hogy a kifejezés bármely n természetes szám esetén természetes számot ad p_n -ként.)