Jelöljük D_n-nel az n-nél nem nagyobb természetes számok közül azoknak a halmazát, amelyeknek *van* 1-nél nagyobb közös osztójuk n-nel, és jelöljük $d(n)$-nel a D_n halmaz elemeinek a számát. Feladatunk állítása azt jelenti, hogy nincs olyan n természetes szám, melyre $d(n)$ értéke 10 volna. Ezt fogjuk bizonyítani, és rögtön feltesszük, hogy $n > 1$, hiszen $d(1) = 0$.

Ha n prímszám, vagy egy prímszám hatványa, azaz $n = p^k$, ahol p prímszám, és $k \geq 1$, akkor

$$D_n = \{p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots,\ p^{k-1} \cdot p\},$$

tehát $d(n) = p^{k-1}$, ami ugyancsak prímszámhatvány – vagy 1. Ilyen n-ekre tehát $d(n)$ értéke nem lehet 10.

Minden más természetes szám felbontható két egymáshoz prím, 1-nél nagyobb természetes szám szorzatára. Legyen $n = a \cdot b$ az n-nek ilyen – de különben tetszőleges – felbontása. Ekkor a

$$D_n(a) = a,\ 2a,\ \ldots,\ ba, \qquad D_n(b) = b,\ 2b,\ \ldots,\ ab$$

halmazoknak egyetlen közös elemük az $n = ab$ szám, hiszen ha $ja = lb$, ahol $1 \leq j \leq b$, $1 \leq l \leq a$, akkor a minden osztója l-nek is osztója, és b minden osztója j-nek is osztója, vagyis csak $j = b$ és $l = a$ lehet. A $D_n(a)$, $D_n(b)$ halmazok egyesítésében tehát $(a + b - 1)$ szám van, és ezek mind elemei D_n-nek is. Emiatt

$$d(n) \geq a + b - 1.$$

Itt akkor és csakis akkor lehet az egyenlőség jele érvényes, ha a is és b is, prímszám, hiszen a-nak és b-nek 1-nél nagyobb, de a-nál, illetve b-nél kisebb osztói elemei D_n-nek, de nincsenek benne a $D_n(a)$, $D_n(b)$ halmazokban. Ha viszont a is, b is prímszámok, akkor D_n minden eleme vagy a-val, vagy b-vel osztható, tehát vagy $D_n(a)$-nak, vagy $D_n(b)$-nek eleme.

Ha itt a és b prímszámok, akkor ezek szerint $d(n) = 10$ csak akkor lehetne, ha $a + b = 11$ volna, viszont a 11-et nem lehet két prímszám összegeként előállítani.

Ezek szerint már csak azokat az n számokat kell vizsgálni, amelyek $n = a \cdot b$ alakúak, ahol a és b relatív prímek, 1-nél nagyobbak, nem mind a kettő prímszám, és $a + b < 11$. Csak két ilyen szám van: a $3 \cdot 4$ és a $4 \cdot 5$, ezekre

$$D_{12} = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\},$$
$$D_{20} = \{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\},$$

tehát $d(12) = 8$, $d(20) = 12$, így $d(n)$ értéke ezekre sem 10. Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

Reviczky János (Budapest, I. István Gimn.)