

a) A g görbét *asztrois*nak nevezik, geometriailag többféleképpen származtatható, itt a következő származtatást vesszük alapul. Legyen a derékszögű koordináta-rendszerben P az origó középpontú, egységnyi sugarú k kör tetszőleges pontja, ennek vetülete az x tengelyen A , az y tengelyen B és az AB egyenesen Q . Ha P befutja a k kört, akkor Q mértani helye a g görbe.

Valóban, legyen $P(a, b)$, ahol

$$(2) \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Így $A(a, 0)$, $B(0, b)$, az AB egyenes egyenlete

$$bx + ay = ab,$$

a P -n átmenő, AB -re merőleges egyenes egyenlete

$$ax - by = a^2 - b^2,$$

és Q metszéspontjuk koordinátái

$$(3) \quad x_Q = a^3, \quad y_Q = b^3.$$

Eszerint P koordinátái a Q koordinátaival kifejezve

$$(4) \quad a = x_Q^{1/3}, \quad b = y_Q^{1/3},$$

s mivel ezek kielégítik (2)-t, Q koordinátái között fennáll az adott (1).

Megfordítva, ha $Q(x, y)$ a g -nek tetszőleges pontja, akkor a (4) koordinátákkal bíró $P(a, b)$ pont rajta van k -n, és belőle kiindulva (3) szerint éppen Q -t kapjuk, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

b) Asztroisunk szimmetrikus az x, y tengelyekre és szögfelezőkre, mert ugyanez áll a származtatásában felhasznált k -ra és x, y tengelyekre. g -nek az x, y tengelyeken levő pontjai a k -n is rajta vannak – ezeket g csúcsainak szokás nevezni –, minden más pontja a származtatás szerint a k belsejében van. Megmutatjuk, hogy g -hez a tetszőleges belső Q pontjában húzott érintő azonos a származtatásában szereplő AB egyenessel. A szimmetria alapján elég a bizonyítást egy olyan pontra elvégezni, amely az I. síknegyed szögfelezője és az x tengely pozitív fele közti (45° -os) szögtartományban van, vagy magán a szögfelezőn, azaz $x \geq y > 0$ és így (3) alapján $a \geq b > 0$; P is a mondott szögtartományban van.

Q ordinátája mint az abszcissza függvénye (1)-ből

$$y = y(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2},$$

és ez a $0 < x < 1$ intervallumban differenciálható. Deriváltja, vagyis a görbe érintőjének iránytangense

$$y'(x) = \frac{3}{2} (1 - x^{2/3})^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-1/3} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3},$$

és ez (3) szerint egyenlő az AB egyenes meredekségével, $(-b/a)$ -val, tehát AB valóban érinti g -t.

c) A feladatban említett 8 metszéspont között a szimmetria alapján van olyan, mely a mondott síknyolcadban van, legyen ez ismét Q , és az egyik négyzet $QRST$ úgy, hogy R a II., T a IV. síknegyedben van. Ekkor a QR egyenes Q -ban érinti g -t, tehát azonos a fenti AB egyenessel, a Q -t kimetsző $PQ(\perp AB)$ egyenes pedig a négyzet QT oldalegyenesével. Eszerint TQ átmegy P -n, másrészt QR -nek az O origó körüli (-90°)-os elfordításával áll elő. Így TQ az x tengelyt a b abszcisszájú B' pontban, az y tengelyt a $-a$ ordinátájú A' pontban metszi, és meredekségének kétféle kifejezéséből:

$$(5) \quad \begin{aligned} b : (a - b) &= a : b, \\ ab &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

d) Mármost a keresett sugárra (3), valamint (2) felhasználásával

$$r^2 = OQ^2 = x^2 + y^2 = a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) = (a^2 + b^2)^2 - 3a^2b^2 = 1 - 3a^2b^2,$$

másrészt (5)-ből négyzetreemeléssel hasonlóan

$$a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 1 - 4a^2b^2, \quad a^2b^2 = 1/5,$$

tehát $r = \sqrt{2/5}$. Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A vizsgált $QRST$ négyzethez vezető P pont (5) alapján úgy szerkeszthető, hogy az $U(1/2, 1)$ pontot összekötjük O -val, ekkor az XOU szög felezője metszi ki P -t. Ugyanis $XOP \angle = \varphi$ jelöléssel $a = \cos \varphi$, $b = \sin \varphi$, ezekkel (5)-ből $(1/2) \sin 2\varphi = \cos 2\varphi$ és $\operatorname{tg} 2\varphi = 2$. – A feladatban említett másik négyzet $QRST$ -nek az I. síknegyed felezőjére (az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozó tükörképe.

