

a) Jelöljük adott (és egymástól páronként különböző) köreinket k_1 -gyel, k_2 -vel, k_3 -mal, a keresett inverzió alapkörét – föltéve, hogy létezik – k -val, köreink erre invertált képeit k'_1 , k'_2 , k'_3 -vel, a középpontjaikon átmenő egyenest e' -vel és ennek k -ra való inverzét – más szóval eredetijét – e -vel.

Mint tudjuk, e akkor és csak akkor adódik egyenesnek, ha e' átmegy a k alapkör középpontján, és ekkor e egybeesik e' -vel (de nem pontról pontra azonosak), különben pedig körnek adódik e . Ebből mindjárt látjuk, hogy ha a kívánt tulajdonság már az eredeti k_1 , k_2 , k_3 körhármásra fennáll – vagyis középpontjaik egy e egyenesen vannak –, akkor található a kívánt k alapkör, és pedig középpontjául választható e -nek bármely pontja, kivéve a k_j -vel ($j = 1, 2, 3$) való metszéspontjait – hiszen kör inverz képe akkor és csak akkor nem kör, ha átmegy az inverzió centrumán –, k sugara pedig tetszőleges.

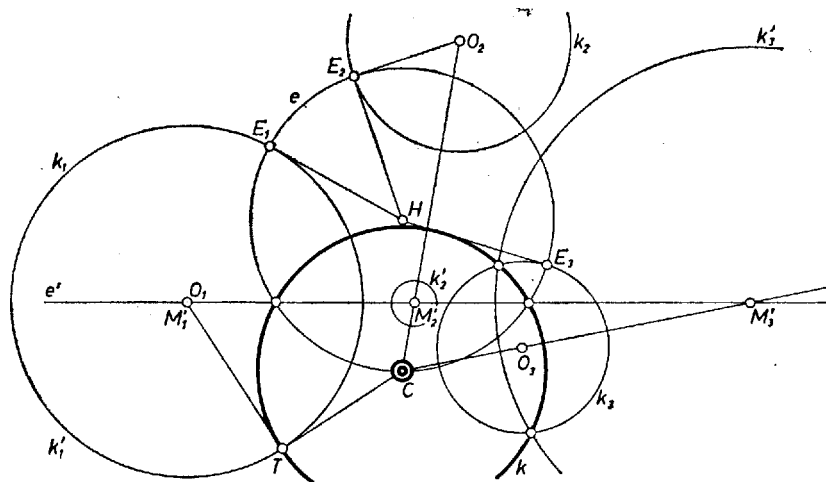
Az adott k_j körök középpontjai általában nincsenek egy egyenesen. Ilyenkor azt a tulajdonságot, hogy a k'_j körök középpontjai az e' egyenesen vannak, a következő alakban használjuk majd fel: e' merőlegesen metszi k'_j mindegyikét. Ugyanis az inverzió szögtartó, részletesebben kimondva: körök, egyenesek képei közti szög egyenlő az eredeti vonalak közti megfelelő szöggel; az utóbbit úgy értve, hogy kör helyett mindig a metszéspontbeli érintőjét tekintjük a szög megfelelő szárának. Eszerint már e -nek merőlegesen kell metszenie k_j mindegyikét, és ekkor a keresett k szerepére megfelel minden olyan kör, melynek középpontja e -n van. (De k középpontjának ismét nem szabad egybeesnie e és a k_j körök közös pontjaival, mert feladatunk csak olyan megoldást fogad el, melyben mindegyik k_j képe is kör.)

A kérdés tehát erre redukálódott: van-e olyan e kör, amely k_j ($j = 1, 2, 3$) mindegyikét merőlegesen metszi. Fel fogjuk használni a következő fogalmakat: pontnak körre vonatkozó hatványa, két kör hatványvonala, három kör hatványpontja. Ezeket és néhány rájuk vonatkozó tételt itt összefoglalunk.¹

P pontnak az O középpontú, r sugarú k körre vonatkozó *hatványa* $PO^2 - r^2$ (k belső pontjaira negatív, k pontjaira 0, külső pontokra pedig pozitív és egyenlő a P -ből k -hoz húzott érintőszakasz négyzetével.) – Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek az O_1 és O_2 középpontú körökre vonatkozó hatványa egyenlő, egyenes, mely merőleges az O_1O_2 centrálisra. Ezt a mértani helyet más néven a két kör *hatványvonalának* nevezzük. Koncentrikus köröknek nincs hatványvonaluk. Két egymást metsző kör hatványvonala a metszéspontjaikat összekötő egyenes. Két egymást érintő kör hatványvonala a közös pontjukban húzott érintőjük. – Három kör páronként vett hatványvonalai – ha a három középpont nincs egy egyenesen – egy pontban, a három kör ún. közös *hatványpontjában* metszik egymást.

Ezekből következik, hogy három körhöz – melyek középpontjai nincsenek egy egyenesen (vagyis amilyen körhármassal esetére még nem adtuk megoldását feladatunknak) – létezik egy és csak egy olyan pont, melynek a három körre vonatkozó hatványa egyenlő. Ez vagy mindhárom körre nézve külső pont, vagy mindháromnak közös belső pontja, illetve a közös pontjuk, ha a három kör egy ponton megy át; e háromféle esetnek megfelelően a hatvány közös értéke, pozitív, negatív, ill. 0.

Mármost redukált kérdésünkre a válasz az első esetben igenlő, az utóbbi kettőben viszont nem létezik a keresett inverzió. Ugyanis az első esetben a hatványpontból a három körhöz húzott érintőszakasz egyenlő, és ezzel a hosszúsággal mint sugárral a hatványpont körül írt kör a három kört merőlegesen metszi. Ezt mutatja az 1. ábra.



1. ábra

H a hatványpont, $HE_1 = HE_2 = HE_3$ az érintőszakaszok. A H körüli, E_1 -en átmenő e körön választottuk az inverzió C centrumát, k -nak CT sugarát pedig speciálisan úgy, hogy k merőlegesen messe k_1 -et; így k'_1 mindjárt azonos magával k_1 -gyel. A körök középpontjai O_j , képeiké M_j , az O_jM_j ($j = 2, 3$) egyenes átmegy C -n. (Magának H -nak a szerkesztését nem tüntettük fel. E célra pl. k_1 és k_2 hatványvonala a hatványpont idézett tétele szerint úgy szerkeszthető, hogy véve egy mindkettőt metsző k_4 kört, a k_1 , k_4 és a k_2 , k_4 körpár közös húregyenesének metszéspontjából merőlegest állítunk az O_1O_2 egyenesre.)

¹ A bizonyítások megtalálhatók pl. a következő helyen: Tolnai Jenő: Érdekes matematikai gyakorló feladatok. II. kötet. Középiskolai Szakköri Füzetek. Tankönyvkiadó. Budapest, 1971. 22–23. oldal.

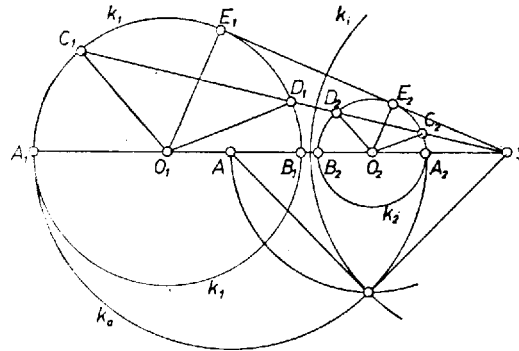
b) A feladat második kérdésének előkészítéséül vegyük észre, hogy két kör sugara akkor és csak akkor egyenlő, ha van olyan (közönséges) tengelyes tükrözés, amely őket egymásba viszi át (ti. a középpontjaik közti szakasz felező merőlegesére való tükrözés ilyen; ha pedig koncentrikusak a körök, akkor bármely, a centrumukon átmenő egyenes ilyen).

Felhasználjuk továbbá P. 31 probléma² segédteételét, a következő alakban. Ha P, f, Q egy tárgy–tükör–kép rendszer, ahol f egy inverzió alapköre vagy egy egyenes – azaz P és Q egymás képei f -re –, továbbá egy inverzióban vagy közönséges tengelyes tükrözésben P, f, Q képe rendre P', f', Q' , akkor P', f', Q' is egy tárgy–tükör–kép rendszer. (Itt tehát 3 inverzióról van szó, amelyek közt tengelyes tükrözések is fölléphetnek.)

Ezeket egybevetve, az adott köreink közül választott kettőnek – mondjuk a k_1 -nek és k_2 -nek – valamely k körre való invertált képei, k'_1 és k'_2 akkor és csak akkor lesznek egyenlő sugarúak, ha van olyan inverzió vagy tengelyes tükrözés, mely k_1 -et és k_2 -t egymásba viszi át. Ha van, akkor ennek az inverziónak az f alapkörét, ill. tengelyét egy f' egyenessé kell transzformálnunk a keresett k körre való invertálás útján, ehhez pedig elég k centrumát f -en úgy megválasztani, hogy ne legyen rajta egyidejűleg se k_1 -en, se k_2 -n.

Állítjuk, hogy a sík bármely két, k_1 és k_2 köréhez van olyan k_i alapkör, amelyre való invertálás a két kört egymásba viszi át. A bizonyítást csak vázoljuk.

Egymáson kívül álló körök esetében a keresett inverzió centruma csak a körök S külső hasonlósági középpontja lehet, csak S -nek van meg az a tulajdonsága, hogy a belőle kiinduló félegyeneseknek k_1 -gyel ugyanannyi közös pontjuk van, mint k_2 -vel: vagy 2 vagy 1 vagy 0. (Ez nyilván szükséges feltétel.)



2. ábra

A 2. ábra jelöléseivel $O_1C_1 \parallel O_2D_2$, $O_1D_1 \parallel O_2C_2$, a párhuzamos szelők tétele alapján

$$SC_1 : SD_2 = SO_1 : SO_2 = SD_1 : SC_2.$$

Másrészt a külső pontból húzott szelő és érintő tétele alapján

$$SC_i \cdot SD_i = SA_i \cdot SB_i = SE_i^2, \quad (i = 1, 2)$$

és ezekből

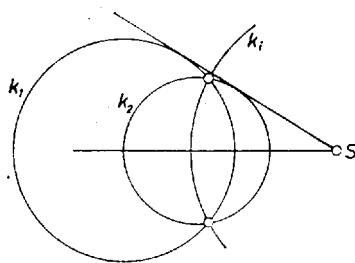
$$SC_1 \cdot SC_2 = SD_1 \cdot SD_2 = \frac{SE_1^2}{SC_1} \cdot \frac{SE_2^2}{SC_2}, \quad SC_1 \cdot SC_2 = SE_1 \cdot SE_2,$$

állandó, tehát a kívánt k_i alapkör sugara SE_1 és SE_2 mértani közepe. A tételt tudva, megszerkeszthető k_i abból is, hogy az A_1, A_2 pontok egymásba mennek át, ezért az A_1A_2 átmérőjű k_a kör önmagába megy át és – mint az 1. ábrán k_1 esetében – az alapkör átmegy az S -ből k_a -hoz húzott érintő T érintési pontján. – Meggondolásunk egymással kívülről érintkező körökre is érvényes. – S csak akkor nem létezik, ha k_1 és k_2 sugarai egyenlők, ekkor O_1O_2 felező merőlegese lép k_i helyére.

Hasonlóan látható be állításunk arra az esetre, ha k_2 a k_1 belsejében van. Ekkor az inverzió centruma k_1 -nek és k_2 -nek S' belső hasonlósági pontja (ahol a párhuzamos és ellentétes irányú sugaraik végpontjait összekötő egyenesek összefutnak), a meggondolásban S helyére S' és E_i helyére F_i teendő, az S' -ben O_1O_2 -re állított merőlegesnek k_i -vel való metszéspontja. Ekkor k'_i sugara az $S'F_1, S'F_2$ szakaszok mértani közepe. ($S'F_i^2$ az S' pont k_i -re vonatkozó hatványának abszolút értéke: $S'F_i^2 = O_iF_i^2 - S'O_i^2 = r_i^2 - S'O_i^2$.) A fentebbi szerkesztés is érvényes, A_1 és A_2 a körök párhuzamos és egyirányú sugarainak végpontjai az O_1O_2 egyenesen. – Érvényes e meggondolás egymással belülről érintkező körökre, valamint két koncentrikus körre is.

²A probléma – megoldását – lásd K. M. L. 39. (1969) 155–156. – új bizonyítást kívánt a P. 12. problémára a következő segédteétel alapján. Ha g egy, a C ponton nem átmenő kör vagy egyenes, és egy P pontnak g -re vonatkozó inverze – ill. tükörképe, ha g egyenes – a Q pont, továbbá g -nek, P -nek, Q -nak egy C középpontú körre vonatkozó inverze g_1, P_1 , ill. Q_1 , akkor P_1 -nek g_1 -re vonatkozó inverze Q_1 . Maga a P. 12. probléma pedig – megoldását lásd K. M. L. 38. (1969) 171–172. – a következőt kívánta. Bizonyítandó, hogy ha g egy a C ponton nem átmenő kör vagy egyenes, akkor egy C középpontú k körre vett inverz képének a középpontját úgy kaphatjuk meg, hogy C -nek g -re vonatkozó inverz képét (ill. tükörképét, ha g egyenes) invertáljuk k -ra. – Megjegyezzük, hogy a P. 31.-beli segédteétel bizonyítása nem használta fel, hogy g nem megy át C -n (erre a föltevésre csak a P. 12.-ben volt szükség, különben ugyanis g képe mindenképpen egyenes lenne, és nem volna értelme beszélni g középpontjáról). Ennélfogva a segédteétel érvényes akkor is, ha g átmegy C -n.

Végül ha k_1 -nek és k_2 -nek két közös pontja van, akkor mindkét meggondolás érvényes, két olyan inverziós alapkör van, mely k_1 -et és k_2 -t egymásba viszi át. A körök metszéspontjain mindkét alapkör átmegy (3. ábra).



3. ábra

Visszatérve feladatunk második kérdéséhez, k_1 , k_2 , k_3 közül kettőt kiszemelve és a fent mondott f -nek véve az őket egymásba átvivő inverzió alapkörét (vagy tükrözés tengelyét), f és a fenti – ha van ilyen – e kör közös pontja mint inverzió centrum teljesíti a követelményt, tetszőleges sugár mellett.