

A két fiúnak a meginduláskor együtt 20 fehér és 20 fekete golyója van, és a játék során állandóan 20-20 golyójuk marad. Jelöljük ezt a számot – kissé általánosabban – n -nel, és A_{kj} -vel azt az eseményt, hogy a k -adik lépés előtt Péternek j fehér golyója van ($0 \leq j \leq n$, $k = 1, 2, \dots$). Ha az A_{kj} esemény bekövetkezik, akkor a k -adik lépés előtt a következő a helyzet:

Péter fehér golyóinak száma: j , fekete golyóié: $n - j$,

Pál fehér golyóinak száma: $n - j$, fekete golyóié: j .

Jelöljük továbbá B_k -val azt az eseményt, hogy a k -adik lépésben Péter fehér golyót ad Pálnak (komplementerét a szokásos módon $\overline{B}_k$ -sal jelöljük) és C_k -val azt, hogy ugyanekkor Pál Péternek feketét ad. Feladatunk a $B_k C_k$ esemény valószínűségét kérdezi.

Ha az A_{kj} esemény bekövetkezik, a fiúk a k -adik lépésben egymástól függetlenül és a rendelkezésre álló golyók közül véletlenszerűen választják ki a másinak átadott golyót, ami egyértelműen meghatározza $B_k C_k$, $B_k \overline{C}_k$, $\overline{B}_k C_k$, $\overline{B}_k \overline{C}_k$ eseményeknek az A_{kj} eseményre vett feltételes valószínűségét:

$$\begin{aligned} P(B_k C_k | A_{kj}) &= \left(\frac{j}{n}\right)^2, & P(B_k \overline{C}_k | A_{kj}) &= \frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n}, \\ P(\overline{B}_k C_k | A_{kj}) &= \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n}, & P(\overline{B}_k \overline{C}_k | A_{kj}) &= \left(\frac{n-j}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Ha az A_{kj} esemény után a B_k és a C_k események következnek be, akkor Péter fehér golyóinak a száma 1-gyel csökken, ezek az események tehát maguk után vonják az $A_{k+1, j-1}$ eseményt. Hasonlóan kapjuk, hogy $A_{kj} B_k \overline{C}_k$ és $A_{kj} \overline{B}_k C_k$ az $A_{k+1, j-t}$, $A_{kj} \overline{B}_k \overline{C}_k$ pedig az $A_{k+1, j+1}$ eseményt vonja maga után. Így a teljes valószínűség tétele alapján:

$$\begin{aligned} P(B_{k+1} C_{k+1} | A_{kj}) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} P(A_{k+1, \nu} | A_{kj}) \cdot P(B_{k+1} C_{k+1} | A_{k+1, \nu}, A_{kj}) = \\ &= P(B_k C_k | A_{kj}) \cdot P(B_{k+1} C_{k+1} | A_{k+1, j-1}) + P(B_k \overline{C}_k | A_{kj}) \cdot P(B_{k+1} C_{k+1} | A_{k+1, j}) + \\ &+ P(\overline{B}_k C_k | A_{kj}) \cdot P(B_{k+1} C_{k+1} | A_{k+1, j}) + P(\overline{B}_k \overline{C}_k | A_{kj}) \cdot P(B_{k+1} C_{k+1} | A_{k+1, j+1}) = \\ &= \left(\frac{j}{n}\right)^2 \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 + 2 \frac{j(n-j)}{n^2} \left(\frac{j}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-j}{n}\right)^2 \left(\frac{j+1}{n}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{j}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right) + \frac{2j}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Itt a végeredményben $\left(\frac{j}{n}\right)^2$ a $P(B_k C_k | A_{kj})$, $\frac{j}{n}$ pedig a $P(B_k | A_{kj})$ feltételes valószínűséggel egyenlő; ha tehát a kapott egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk az A_{kj} esemény valószínűségével, és összegezzünk a $j = 0, 1, \dots, n$ értékekre, azt kapjuk, hogy

$$P(B_{k+1} C_{k+1}) = \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \cdot P(B_k C_k) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot P(B_k) + \frac{1}{n^2}.$$

Hasonló módon kapunk rekurziót a $P(B_k)$ valószínűségekre:

$$P(B_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot P(B_k) + \frac{1}{n},$$

amiből $P(B_k)$ értéke könnyen előállítható:

$$P(B_k) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1} \left(P(B_1) - \frac{1}{2}\right).$$

Helyettesítsük ezt a $P(B_k C_k)$ valószínűségek fenti rekurziójába, némi számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(B_k C_k) &= \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^{k-1} \left[\left(P(B_1 C_1) - \frac{n}{4n-2}\right) - \left(P(B_1) - \frac{1}{2}\right) \right] + \\ &+ \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1} \left(P(B_1) - \frac{1}{2}\right) + \frac{n}{4n-2}. \end{aligned}$$

Feladatunk szerint $n = 20$, $P(B_1) = 0,6$, $P(B_1 C_1) = 0,36$, ezeket behelyettesítve kapjuk a keresett valószínűségeket.