

Ismeretes, hogy a sík azon P pontjainak a mértani helye, melyeknek két különböző ponttól, A -tól és B -től mért távolságainak az aránya egy adott pozitív λ szám: $PA : PB = \lambda$, az AB szakasz f felezőmerőlegese, ha $\lambda = 1$; ha pedig $\lambda \neq 1$, akkor egy k_λ kör, melyre A -t invertálva B -t kapjuk.¹ A továbbiakban f -et egyszerűség kedvéért k' -vel is jelöljük, hogy ne kelljen a két esetet megkülönböztetni. Könnyen belátható az is, hogy k_λ két olyan részre vágja a síkot, amelyek közül az A -t tartalmazó részben

$$PA : PB < \lambda,$$

a B -t tartalmazó részben pedig

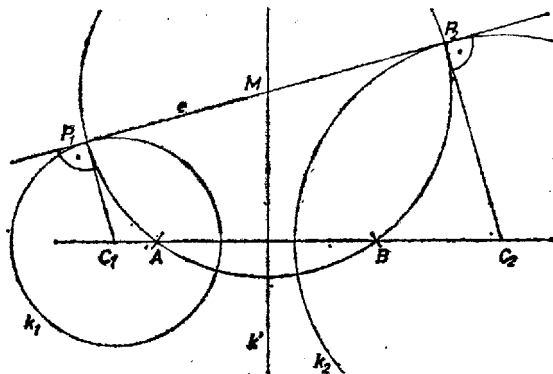
$$PA : PB > \lambda.$$

(Ez $\lambda = 1$ mellett közismert, $\lambda \neq 1$ mellett pedig az idézett bizonyításból kiolvasható, hiszen ott épp a $\lambda = 1$ esetre vezettük vissza a $\lambda \neq 1$ esetet is.)

Ezek szerint, ha találunk az e egyenesen olyan P_1 pontot, hogy az e egyenes P_1 -től különböző pontjai a $P_1A : P_1B = \lambda$ arányhoz tartozó k_λ -nak B -t tartalmazó oldalán vannak, akkor e tetszőleges, P_1 től különböző P pontjában

$$(1) \quad PA : PB > P_1A : P_1B,$$

tehát a vizsgált aránynak P_1 -ben minimuma van; és megfordítva, ha (1) teljesül, akkor az e egyenes P_1 től különböző pontjai k_λ -nak B -t tartalmazó oldalán vannak.



Hasonlóan látható be, hogy a $PA : PB$ aránynak akkor és csakis akkor van a P_2 pontban maximuma, ha e -nek P_2 től különböző pontjai a $P_2A : P_2B = \lambda$ arányhoz tartozó k_λ -nak A -t tartalmazó oldalán vannak.

Az, hogy e pontjai egyikük kivételével k_λ egyik oldalán legyenek, csak akkor lehet, ha k_λ kör, és e érinti k_λ -t. Tegyük fel először, hogy e és k' metszik egymást, és jelöljük a metszéspontot M -mel, az M középpontú, A -n és B -n átmenő kört k -val. Tetszőleges $\lambda \neq 1$ mellett a k_λ alapkörü inverzió A -t B -be viszi, tehát k -t önmagába viszi át (hiszen k és k_λ metszi egymást, és e metszéspontok a helyükön maradnak). Emiatt k merőleges k_λ -ra, és az M -ből k_λ -hoz húzott érintők érintési pontjai rajta vannak k -n. A keresett P_1 és P_2 pont tehát csak e és k metszéspontja lehet. Belátjuk, hogy P_1 a k' -nek A -t tartalmazó oldalán levő metszéspont, P_2 pedig a másik metszéspont. Jelöljük ezeket a pontokat átmenetileg rendre Q_1 -gyel és Q_2 -vel; megmutatjuk, hogy azonosak a keresett pontokkal.

Messe az e -re merőleges, Q_i -n átmenő egyenes az AB egyenest C_i -ben, és legyen a C_i középpontú, P_i -n átmenő kör k_i ($i = 1, 2$). A szerkesztés alapján k_i merőlegesen metszi k -t, így k -nak a C_i -n átmenő AB egyenesen levő A és B pontjait a k_i -re való invertálás egymásba viszi át. Emiatt k_i az $AP_i : BP_i$ arányhoz tartozó Apollóniosz-kör ($i = 1, 2$). Az A pont a k_1 belső pontja, k_2 -nek pedig külső pontja, tehát Q_i azonos P_i -vel ($i = 1, 2$).

Ha tehát e és k' metszi egymást, akkor a minimális és maximális $AP : BP$ arányt adó pontokat a metszéspontjuk körül rajzolt, A -n átmenő kör metszi ki e -ből, a k' -nek A -t tartalmazó oldalán kapjuk a minimumot, a másik oldalon a maximumot.

Ha e és k' azonosak, akkor e -n az $AP : BP$ arány állandó, tehát nincs sem maximuma, sem minimuma. Ha e párhuzamos k' -vel, akkor az A, B pontokhoz tartozó bármelyik k_λ kört csak az AB egyenesen levő pontban érintheti, hiszen k_λ is, e is szimmetrikus az AB egyenesre. Jelöljük e és az AB egyenes metszéspontját P_1 -gyel, vagy P_2 -vel aszerint, hogy az a k' -nek A -t tartalmazó vagy A -t nem tartalmazó oldalán van. Az első esetben P_1 -ben minimuma van az $AP : BP$ aránynak, hiszen a P_1 en átmenő, az A, B pontokhoz tartozó Apollóniosz-kör belsejében tartalmazza az A pontot, hasonlóan látható, hogy a második esetben P_2 -ben maximum van. Mivel szélső érték csak e és valamely k_λ érintési pontjában lehet, ezekben az esetekben maximum, illetve minimum nincs.

Katona Endre (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldásban maximumnak (illetve minimumnak) azt a függvényértéket tekintettük, amelyiknél a vizsgált függvény minden más értéke határozottan kisebb (illetve nagyobb). A kapott eredmény akkor is helyes (csak

¹Lásd pl. *Bártfai-Tusnady*: Pályázat az inverzióról. K. M. L. 42 (1971) 1–7.

kicsit hosszabban bizonyítható), ha a definícióban „kisebb” (illetve „nagyobb”) helyett a „kisebb vagy egyenlő” (illetve „nagyobb vagy egyenlő”) kifejezést használjuk; kivéve azt az esetet, amikor e és k' azonosak, ekkor ugyanis az utóbbi definíció szerint e minden pontjában maximum is és minimum is van.

2. A szerkesztés – mint látjuk – egyszerű, az indoklás viszont hosszabb. Erre az ellentétre utaltunk már az 1334. gyakorlatban (K. M. L. 42 (1971) 211.).