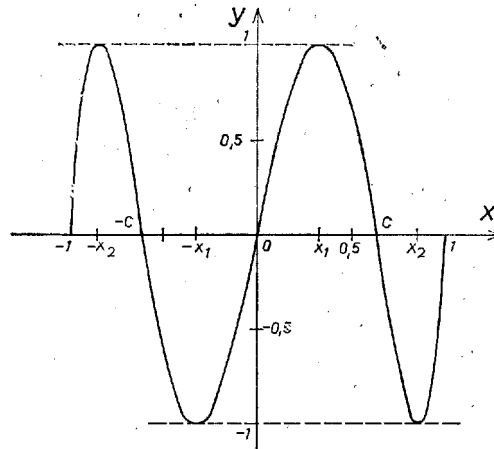


Ötödfokú polinomnak legfeljebb 4 különböző helyen lehet szélső értéke – amennyiben deriváltjának, ami negyedfokú, mind a négy zérushelye valós és egymástól különböző –, és a 4 szélső érték közt csak váltakozva követheti egymást a 2 maximum és a 2 minimum, mert bármelyik szomszédos párjuk közt a derivált értéke vagy állandóan pozitív vagy állandóan negatív. Mivel a keresett  $p(x)$  esetében a maximumok pozitívak, a minimumok negatívak, egy-egy maximum és minimum között zérushelye is van  $p(x)$ -nek, szám szerint 3.



Elég lesz olyan  $p(x)$ -et képezni, amelyre a közbülső zérushelyek egyike  $x = 0$ , a további kettő pedig  $\pm c$ , ahol  $0 < c < 1$ . Elképzelésünk szerint tehát a polinom ilyen alakú:

$$(1) \quad \begin{aligned} p(x) &= A(x+1)(x+c)x(x-c)(x-1) = \\ &= A[x^5 - (1+c^2)x^3 + c^2x], \end{aligned}$$

ahol  $A$  is meghatározandó állandó. Azt fogjuk belátni, hogy az  $A$  és  $c$  paraméterek értéke megválasztható úgy, hogy  $p(x)$ -re teljesüljenek a feladat követelményei.

A szélső értékek helyei csak a derivált gyökhelyei lehetnek, tekintsük tehát a

$$(2) \quad p'(x) = A[5x^4 - 3(1+c^2)x^2 + c^2] = 0$$

negyedfokú egyenletet. Ennek  $x^2$ -re mint ismeretlenre két különböző valós gyöke van, ha

$$D = 9(1+c^2)^2 - 20c^2 > 0,$$

ami valóban teljesül, hiszen

$$D = 9 - 2c^2 + 9c^4 = 9 \left(1 - \frac{c^2}{9}\right)^2 + \frac{80}{9}c^4 > 0.$$

( $x = 0$  nem gyöke (2)-nek, hiszen  $c \neq 0$ ). Jelöljük e gyökök közül a pozitívakat  $x_1$ -gyel és  $x_2$ -vel – a másik kettő  $-x_1$  és  $-x_2$  –, ekkor a gyökök és az együtthatók közti összefüggés szerint (a (2)-t  $x^2$ -re vonatkozó másodfokú egyenletnek tekintve)

$$(3) \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{3(1+c^2)}{5}; \quad x_1^2 x_2^2 = \frac{c^2}{5}$$

és  $p'(x) = 5A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)$ . Ebből láthatjuk, hogy  $p'(x)$  mind a négy gyökhelyen előjelet vált, ezekben tehát  $p(x)$ -nek valóban szélső értéke van.

Azt szeretnénk, ha mondjuk

$$(4) \quad p(x_1) = +1; \quad p(x_2) = -1$$

volna; mivel  $p(x)$  páratlan függvény, ebből már következik, hogy

$$p(-x_1) = -1; \quad p(-x_2) = +1.$$

Elegendő ehhez  $c$ -t úgy megválasztanunk, hogy

$$(5) \quad p(x_1) + p(x_2) = 0$$

legyen, hiszen az  $A$  állandó megválasztható úgy, hogy  $p(x_1) = 1$  legyen, és akkor (5) alapján  $p(x_2) = -1$  is teljesül. Mivel  $x_1$  és  $x_2$  gyöke (2)-nek,

$$5x_i^5 = 3(1+c^2)x_i^3 - c^2x_i \quad (i = 1, 2),$$

így (3) alapján  $p(x_1) + p(x_2)$  előállítható anélkül, hogy  $x_1$  és  $x_2$  értékét meg kellene adnunk:

$$\begin{aligned} \frac{5}{A}[p(x_1) + p(x_2)] &= (5x_1^5 + 5x_2^5) - 5(1 + c^2)(x_1^3 + x_2^3) + 5c^2(x_1 + x_2) = \\ &= 4c^2(x_1 + x_2) - 2(1 + c^2)(x_1^3 + x_2^3) = 2(x_1 + x_2)[2c^2 - (1 + c^2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)] = \\ &= 2(x_1 + x_2) \left[ 2c^2 - (1 + c^2) \left( \frac{3 + 3c^2}{5} - \frac{c}{\sqrt{5}} \right) \right]. \end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy  $x_1, x_2, c$  pozitív volta miatt (3)-ból  $x_1x_2 = \frac{c}{\sqrt{5}}$  következik.)

Ez csak úgy lehet 0, ha  $c$  gyöke a

$$(6) \quad 2c^2 - (1 + c^2) \left( \frac{3 + 3c^2}{5} - \frac{c}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

egyenletnek. Osszuk ezt  $c^2$ -nel és helyettesítsük  $c + \frac{1}{c}$  helyére  $y$ -t, így a

$$2 - y \left( \frac{3y}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei

$$y_1 = \sqrt{5}, \quad y_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{3},$$

de mivel  $c + \frac{1}{c} \geq 2$ , számunkra csak  $y_1$  használható. A

$$c + \frac{1}{c} = \sqrt{5}$$

másodfokú egyenletből pedig

$$c_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \quad c_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

és célunknak csak  $c_1$  felel meg, mert  $c_2 > 1$ .  $c_1$  valóban gyöke (6)-nak, tehát mellette  $p(x)$ -re teljesül (5).

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy  $c_1$  mellett  $x_1$  és  $x_2$  is a  $(0, 1)$  intervallumhoz tartozik. Valóban, így

$$x_1^2 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{10} < 1, \quad \text{és} \quad x_2^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} < 1.$$

Végül  $A$ -t meghatározva és megelégedve az állandók közelítő, de áttekinthető értékeivel, (1) helyére konkrétan a következő polinom lép:

$$p(x) = 12,4(x^5 - 1,38x^3 + 0,38x).$$

*Megjegyzés.* Meg lehet mutatni, hogy  $p(x)$ -en és  $-p(x)$ -en kívül nincs más megoldása a feladatnak.