

u_1, u_2, v_1, v_2 ismeretében a rekurzió alapján u_n és v_n , és ezért s_n is meghatározható minden n természetes számra. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ ismerete elegendő-e u_1, u_2, v_1, v_2 meghatározására. Mivel $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ mindegyike kifejezhető u_1, u_2, v_1, v_2 -vel (pontosabban ezek lineáris kombinációjával), azért s_1, s_2, s_3, s_4 ilyen előállítására egy négyismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszert ad u_1, u_2, v_1, v_2 -re. Valóban,

$$\begin{aligned} s_3 &= u_3 + v_3 = (2u_2 + u_1) + (3v_2 - v_1), \\ s_4 &= u_4 + v_4 = (2u_3 + u_2) + (3v_3 - v_2) = \\ &= 2(2u_2 + u_1) + u_2 + 3(3v_2 - v_1) - v_2 = 5u_2 + 2u_1 + 8v_2 - 3v_1, \end{aligned}$$

így a mondott egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_1 + v_1 = s_1, \\ (2) \quad & u_2 + v_2 = s_2, \\ (3) \quad & u_1 + 2u_2 - v_1 + 3v_2 = s_3, \\ (4) \quad & 2u_1 + 5u_2 - 3v_1 + 8v_2 = s_4. \end{aligned}$$

Ezt a rendszert könnyen megoldhatjuk:

$$\begin{aligned} u_1 &= -s_2 + 3s_3 - s_4, \\ u_2 &= -s_1 + s_2 + 5s_3 - 2s_4, \\ v_1 &= s_1 + s_2 - 3s_3 + s_4, \\ v_2 &= s_1 - 5s_3 + 2s_4. \end{aligned}$$

Tehát ha $k \geq 5$, azaz legalább s_1, s_2, s_3, s_4 adott, akkor $s_1, \dots, s_{k-1}$ -ből nemcsak s_k , de minden s_n ($n \geq k$) meghatározható. Ha azonban $k \leq 4$, akkor s_k nem határozható meg egyértelműen. Ha például s_1, s_2, s_3 adott, de s_4 már nem, akkor (4)-be s_4 helyébe egy tetszőleges p számot írva, kapunk egy olyan megoldásrendszert, melyben s_4 helyett mindenütt p áll. Azaz a megoldásrendszer más és más p -re más és más lesz.

Megjegyzések. 1. A kérdést természetesen úgy értettük, hogy $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ egy helyesen képezett sorozat tagjai, nem pedig tetszés szerint választott számok. Láttuk ugyanis, hogy már s_1, s_2, s_3, s_4 elég az u_n, v_n, s_n sorozatok visszaállítására.

2. Az u_n, v_n és s_n tagok rekurzív megadásából következik, hogy egyenletrendszerünk és annak megoldásrendszere helyes marad, ha bennük az indexek mindegyikéhez ugyanazt az egész számot hozzáadjuk. Következésképpen $k \geq 5$ -re

$$\begin{aligned} (5) \quad & u_{k-4} = -s_{k-3} + 3s_{k-2} - s_{k-1}, \\ & u_{k-3} = -s_{k-4} + s_{k-3} + 5s_{k-2} - 2s_{k-1}, \\ & v_{k-4} = s_{k-4} + s_{k-3} - 3s_{k-2} + s_{k-1}, \\ & v_{k-3} = s_{k-4} - 5s_{k-2} + 2s_{k-1}, \end{aligned}$$

és (4)-ből

$$\begin{aligned} s_k &= 5u_{k-2} + 2u_{k-3} + 8v_{k-2} - 3v_{k-3} = \\ &= 5(2u_{k-3} + u_{k-4}) + 2u_{k-3} + 8(3v_{k-3} - v_{k-4}) - 3v_{k-3} = \\ &= 12u_{k-3} + 5u_{k-4} + 21v_{k-3} - 8v_{k-4}. \end{aligned}$$

Innen és (5)-ből könnyen adódik, hogy ha $k \geq 5$, akkor

$$s_k = s_{k-4} - s_{k-3} - 6s_{k-2} + 5s_{k-1}.$$

Eszerint ha csak s_k -ra van szükségünk, ennek kiszámítása egyszerűbb, ha az ismert tagok közül a négy legnagyobb indexű tagot használjuk föl.

Móri Tamás (Budapest, Berzsényi D. Gimn., III. o. t.)